РУКОВОДСТВО

КЪ ПРЕПОДАВАНІЮ

АРИѲМЕТИКИ

МАЛОЛѢТНЫМЪ ДѢТЯМЪ.

Составлено

ПЕТРОМЪ ГУРЬЕВЫМЪ.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Напечатано иждивеніемъ Санктпетербургскаго Воспитательнаго Дома.

С. ПЕТЕРБУРГЪ.

Печатано въ типографіи Карла Крайя.

1842.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ

съ тѣмъ, чтобъ по отпечатаніи представлено было въ Цензурный Комитетъ узаконенное число экземпляровъ.

С. Петербургъ, Іюля 27 дня 1841 года.

Ценсоръ *А. Очкинъ.*

Предисловіе.

—

Послѣ сказаннаго въ первой части предлежащаго Руководства относительно преподаванія Ариѳметики, считаю излишнимъ входить здѣсь въ какія-либо сужденія о томъ же предметѣ; мнѣ остается теперь оправдать себя отъ тѣхъ замѣчаній, которыя мнѣ удавалось читать или слышать о первой части моего труда.

Главный упрекъ, сдѣланный мнѣ, состоитъ въ томъ, что будто бы я слишкомъ растянулъ свое Руководство къ Ариѳметикѣ. Если преподавать по этой книгѣ, замѣчаютъ нѣкоторые, гдѣ нѣсколько десятковъ страницъ занято только первыми десятью числами, то надобно будетъ потратить весьма много времени, которымъ вообще должно дорожить въ школахъ. Съ перваго взгляда замѣчаніе это покажется справедливымъ; но если внимательнѣе разсмотрѣть дѣло, вникнуть въ выгоды, проистекающія отъ постепеннаго изложенія и той строгой отчетливости, которой я вездѣ подвергаю ученика: то замедленіе во времени будетъ только кажущимся, мнимымъ, а не дѣйствительнымъ.

То, что въ началѣ, по причинѣ строгой послѣдовательности, замедляетъ успѣхи, потòмъ, на оборотъ, ускоряетъ ихъ; ибо ученикъ, будучи веденъ по методѣ мною изложенной всегда съ сознаніемъ, не имѣетъ надобности безпрестанно возвращаться къ пройденному, какъ это почти всегда бываетъ при старыхъ методахъ. Самыя важныя, по моему мнѣнію, ошибки элементарныхъ преподавателей суть поспѣшность и желаніе скорѣе насладиться плодами трудовъ своихъ, блеснуть успѣхами учениковъ и всегда забѣгать впередъ, несоразмѣрно съ силами учащихся. Оттого происходитъ почти общее явленіе въ нашихъ учебныхъ заведеніяхъ, что изъ класса, состоящаго изъ тридцати или сорока учениковъ, обыкновенно успѣваетъ менѣе нежели половина, и то самыхъ даровитыхъ, которые и безъ учителя, съ помощію одного руководства, во многомъ успѣли бы сами собою,—а прочіе, наибольшее число, плетутся такъ-и-сякъ, схватываютъ одни вершки знанія, и принуждаютъ учителя безпрестанно возвращаться къ пройденному.

Сдѣлавшіе мнѣ упрекъ, что я долго останавливаю учениковъ на первыхъ началахъ, и черезъ то трачу много времени, кажется, не довольно сами расчислили, сколько по-напрасну убивается времени почти во всѣхъ школахъ по предмету преподаванія Ариѳметики. Привожу здѣсь небольшую выкладку, чтобъ оправдать мои слова. Обыкновенно начинаютъ учить дѣ-

тей Ариѳметикѣ съ семилѣтняго возроста, но часто, очень часто случается видѣть пятнадцати-лѣтнихъ юношей, которые, не смотря на то, что занимаются Ариѳметикою около 8 лѣтъ, слабо знаютъ её. Расчитывая болѣе на посредственныя способности учениковъ, нежели на даровитыя, можно рѣшительно утверждать, что среднимъ числомъ каждому приходится заниматься Ариѳметикою по крайней мѣрѣ 6 лѣтъ. Полагая учебный годъ въ 9 мѣсяцевъ, за исключеніемъ каникулъ, воскресныхъ и табельныхъ дней, и круглымъ числомъ по 4 урока въ недѣлю, выйдетъ 864 урока, посвящаемыхъ собственно Ариѳметикѣ. Итогъ огромный! Въ чемъ же обыкновенно проходитъ это время? — По большой части въ одностороннихъ, механическихъ пріемахъ исчисленія и въ безпрерывныхъ сухихъ повтореніяхъ пройденнаго, гдѣ дѣйствуетъ только одна память. Потрудитесь слѣдить за школьнымъ преподаваніемъ, и вы удостовѣритесь, что это сущая правда. Не говорю, чтобы не было исключеній, какъ и во всякомъ дѣлѣ; но они рѣдки. Оттого такія занятія по большой части тяготятъ учащихся; является скука, а гдѣ скука, тамъ и отвращеніе.

Итакъ, вмѣсто того, чтобы затруднять и себя и учащихся однимъ безпрерывнымъ повтореніемъ, и, такъ сказать, долбленіемъ одного и того же, не лучше ли съ самаго начала поступать, хотя медленно, но съ строгою отчетливостію, всегда давать болѣе пищи разсудку, не-

жели памяти, сколько возможно болѣе возбуждать самодѣятельность, и вести ученика по пріятной, разнообразной стезѣ?

Когда я составлялъ свое Руководство, то преимущественно имѣлъ въ виду *самодѣятельность* учениковъ, ибо убѣжденъ, что бо̀льшая часть неуспѣховъ происходитъ не столько отъ способностей, сколько отъ недостатка самодѣятельности. Не рѣдко видимъ, что учитель въ классѣ принимаетъ на себя роль оратора, вмѣсто того, чтобы быть руководителемъ, вмѣсто того, чтобы только наводить учениковъ на сознаніе; сосредоточиваетъ въ себѣ всю дѣятельность, безумолку толкуетъ съ каѳедры, и полагаетъ, что въ многоглаголіи обрѣлъ спасеніе. Отъ этого ученики ведутся какъ-бы на помочахъ, по протоптанной дорожкѣ, и не смѣютъ сдѣлать шагу безъ своего наставника; когда же пото̀мъ, будучи предоставлены самимъ себѣ, встрѣчаютъ какія-либо затрудненія, то спотыкаются и уже не двигаются съ мѣста. Привычка довершаетъ дѣло. Такимъ образомъ умъ, не пріученный съ раннихъ лѣтъ пытать свои силы, дѣлается впослѣдствіи недовѣрчивымъ къ самому себѣ, и радъ—радъ, если за него работаютъ другіе. Вотъ причина плоскихъ умовъ, которыми такъ бываютъ богаты человѣческія общества. Грѣшатъ, сильно грѣшатъ противу Бога тѣ педагоги, которые всѣ неуспѣхи, всѣ неудачи свои сваливаютъ на дурныя способности своихъ учениковъ: въ бо̀льшей части случаевъ виноваты

бываютъ не способности, а собственно тѣ средства, коими онѣ развиваются, вопреки мнѣнію бывшаго почтеннаго рецензента Сына Отечества (*), который утверждаетъ, что по всякой, самой дурной методѣ можно учиться.

Есть еще и другаго рода обвиненіе, высказанное людьми вовсе нечитавшими моего руководства и, какъ кажется, мало знакомыми съ Педагогіею. Утверждали, что прежде, нежели начать дѣйствовать по моей методѣ,—которую назвали Песталоцціевой потому единственно, что я заимствовалъ у Песталоцци три таблицы для наглядныхъ упражненій,—нужно образовать по ней особыхъ учителей, а также предварительно сдѣлать многія измѣненія въ устройствѣ учебной части нашихъ заведеній! Такъ выразился о моей книгѣ бывшій рецензентъ Сына Отечества (См. N° 7 за 1839 годъ). Недоумѣваю, о какомъ особомъ приготовленіи учителей разумѣетъ здѣсь г. рецензентъ? Не могу представить себѣ грамотнаго человѣка, мало-мальски образованнаго, который бы въ чемъ-либо могъ встрѣтить для себя затрудненіе, руководствуя по книгѣ, изложенной съ такою строгою послѣдовательностію и отчетливостію. Если думаютъ, что упражненія по таблицамъ затруднятъ не-

(*) См. No 7. Сына Отеч. за 1839-й годъ. По поводу моей книги, р. рецензентъ высказалъ въ немногихъ словахъ свое рѣшительное мнѣніе о методахъ, которое вѣроятно сотнею людей примется за неоспоримое, какъ это обыкновенно у насъ случается. Не кстати здѣсь возражать ему, но при изданіи моей Дидактики, которою теперь прилежно занимаюсь, не упущу случая поговорить объ этомъ любопытномъ предметѣ.

опытнаго преподавателя, то крайне ошибаются: для этихъ упражненій я иногда употреблялъ въ младшихъ классахъ самыхъ неопытныхъ молодыхъ людей, и они черезъ два, три урока какъ нельзя лучше исполняли дѣло, руководствуясь только книгою, безъ всякаго съ моей стороны содѣйствія. Но чтобъ упражненія по таблицамъ могли нарушить общепринятый порядокъ въ школахъ, то, признаюсь, это такая мысль, которая можетъ прійти въ голову только человѣку, совершенно незнакомому съ общественнымъ преподаваніемъ, и потому остается безъ всякаго съ моей стороны возраженія.

Вотъ все, что я нужнымъ считалъ сказать при изданіи второй части моего Руководства. Безпристрастные читатели, надѣюсь, сперва испытаютъ предлагаемый мною способъ на самомъ дѣлѣ, а потòмъ уже станутъ высказывать свои мнѣнія. Вѣдь кажется это въ натурѣ вещей?

Упомянувъ о замѣчаніяхъ, сдѣланныхъ на счетъ моего сочиненія, долгомъ считаю также изъявить свою искреннюю благодарность и тѣмъ особамъ, которыя почтили мой слабый трудъ лестными для меня своими отзывами. Впрочемъ, не будучи побуждаемъ никакими спекулятивными расчетами и работая собственно для пользы возрастающаго поколѣнія, я готовъ принять съ истинною признательностію всякое дѣльное замѣчаніе на мою книгу, которое конечно послужитъ къ ея улучшенію.

Вторая и послѣдняя, нынѣ издаваемая, часть дѣлится, подобно первой, на три слѣдующіе отдѣла:

I. **Первая степень.** *Различныя дѣйствія надъ дробями, выраженными въ малыхъ числахъ (преимущественно изустное исчисленіе).*

II. **Вторая степень.** *Различныя дѣйствія надъ дробными числами вообще (письменное исчисленіе).*

III. **Третія степень.** *Дѣйствія надъ десятичными и непрерывными дробями.*

Петръ Гурьевъ.

Гатчина.

ПЕРВАЯ СТЕПЕНЬ.

РАЗЛИЧНЫЯ ДѢЙСТВІЯ НАДЪ ДРОБЯМИ, ВЫРАЖЕННЫМИ ВЪ МАЛЫХЪ ЧИСЛАХЪ.

(Преимущественно изустныя исчисленія).

№ 33. ПЕРВОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

О дробяхъ вообще и ихъ составныхъ частяхъ.

Мы знаемъ уже изъ прежнихъ упражненій въ исчисленіи, что числа можно разлагать или раздѣлять на двѣ, на три и болѣе равныхъ и неравныхъ частей; такъ, напримѣръ:

число 16 = 8 + 8 (двѣ равныя части).

» = 4 + 4 + 4 + 4 (четыре равныя части).

» = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 (восемь равныхъ частей).

или 16 = 9 + 7 (двѣ неравныя части).

» = 10 + 6 (idem).

» = 11 + 5 — — —

или 16 = 11 + 3 + 2 (три неравныя части).

» = 9 + 4 + 3 (idem).

и проч. проч.

Но здѣсь все-таки каждая изъ частей, на которыя раздѣлено число 16, состоитъ изъ цѣлыхъ еди-

ницъ: раздѣливъ число 16 на двѣ равныя части, получаемъ на каждую часть 8 единицъ; раздѣливъ его на 4 равныя части, на каждую часть имѣемъ по 4 единицы, и т. д.

Кромѣ этого, мы также видѣли, что и *каждую единицу*, или *каждое цѣлое*, можно дѣлить на сколько угодно частей; но въ этомъ случаѣ на каждую часть не придется уже по цѣлой единицѣ, а менѣе. Такъ, раздѣляя листъ бумаги на двѣ, на три и болѣе равныхъ частей, на каждую часть получаемъ не по цѣлому листу, а только по *куску* отъ него.

Намъ также извѣстно, что если цѣлое, или единицу, раздѣлить на *двѣ* равныя части, то каждая изъ нихъ назовется *половиною*, на *три* — *третью*, на *четыре* — *четвертью*, на пять — *пятою* и т. д.

Поэтому,

одна седьмая ($\frac{1}{7}$) какого-либо цѣлаго есть такая часть, которую надобно повторить равно семь разъ, чтобы опять получить тоже самое цѣлое;

двѣ седьмыхъ ($\frac{2}{7}$) какого-либо цѣлаго суть двѣ такія равныя части, которыхъ въ цѣломъ заключается *семь*.

и т. д.

Значитъ, чтобы изъ равныхъ частей опять можно было собрать цѣлое, надобно имѣть ихъ непремѣнно столько, на сколько это цѣлое было раздѣлено. Такъ, *третей* надобно имѣть *три*, *четвертей*—*четыре*, *одиннадцатыхъ* — *одиннадцать*.

Слѣдственно, *шесть шестыхъ*, *двѣ половины*, *девять девятыхъ* и проч., всѣ эти различныя собранія частей равны *одному цѣлому* или *единицѣ*, чтобы впрочемъ подъ этою единицею ни разумѣли, монету-ли, какую-либо мѣру вѣса, или что другое. Вся разница

такихъ собранiй состоитъ въ томъ, что въ одномъ случаѣ предметъ дробится на бóльшее число частей, а въ другомъ на мéньшее.

Каждая изъ такихъ-то частей цѣлаго, или совокупленiе нѣсколькихъ вмѣстѣ, и составляетъ *дробь*, или *дробное число.* Поэтому, *половина*, *три четверти*, *четыре пятыхъ*, *семь осьмыхъ* — суть *дроби* или *дробныя* числа.

Хотя, по видимому, все сказанное нами слишкомъ просто, однакожъ если ограничимся только подобными объясненiями, и тотчасъ перейдемъ къ слѣдующему упражненiю, полагая, что осьми или девятилѣтнее дитя (и даже старѣе) теперь уже хорошо можетъ отдѣлить въ умѣ своемъ *дробь* отъ *цѣлаго*, то крайне ошибемся. Чтобы дѣятельность внутренней созерцательности могла быть успѣшна, прежде надобно развить внѣшнюю наглядность и посредствомъ искуства пособить, такъ сказать, природѣ, которая, будучи предоставлена самой себѣ, обыкновенно развивается медленно, всегда требуя прежде фактовъ, опытовъ.

Помѣщенныя въ концѣ этой книги Песталоццiевы таблицы чиселъ, вторая и третья, послужатъ намъ богатымъ источникомъ для нагладныхъ упражненiй въ исчисленiи дробей. Вторая таблица состоитъ изъ десяти горизонтальныхъ и столькихъ же вертикальныхъ рядовъ, или всего изъ ста квадратовъ. Каждый квадратъ верхняго горизонтальнаго ряда представляетъ собою *цѣлое* или *единицу*, каждый квадратъ втораго ряда — *цѣлое*, раздѣленное на *двѣ половины*, каждый квадратъ третьяго

ряда — на *три трети*, и т. д. до послѣдняго, гдѣ квадратъ раздѣленъ на *десять десятыхъ*.

Эта таблица также, какъ и первая, должна быть нарисована въ большомъ размѣрѣ и наклеена на картонъ или полотно.

Вотъ въ чемъ состоитъ ходъ упражненія.

У. (указывая попеременно на одинъ, два, три и проч. квадратовъ верхняго горизонтальнаго ряда таблицы, говоритъ) здѣсь *одинъ цѣлый* квадратъ, здѣсь *два цѣлые* квадрата, и т. д.

Ученики повторяютъ за учителемъ.

У. (указывая на первый квадратъ втораго горизонтальнаго ряда). На сколько частей раздѣленъ этотъ квадратъ?

Д. На двѣ равныя части.

У. Какъ называется каждая изъ нихъ?

Д. *Половиною.*

Означьте сами указкой половину цѣлаго квадрата. Означьте другую половину.

У. Сколько *цѣлое* имѣетъ *половинъ?*

Д. *Цѣлое* имѣетъ двѣ *половины.*

У. Составляетъ-ли эта половина цѣлый квадратъ?

Д. Нѣтъ, она составляетъ только часть квадрата.

У. Такъ, каждая *половина* цѣлаго есть часть его, или *дробь*.

У. (указывая на первый квадратъ третьяго ряда). На сколько равныхъ частей раздѣленъ этотъ квадратъ?

Д. На *три* равныя части.

У. **Какъ называется каждая изъ нихъ?**

Д. *Одною третью.*

У. **Сколько каждое цѣлое имѣетъ третей?**

Д. **Каждое цѣлое имѣетъ** *три трети.*

Гдѣ *треть* квадрата? Гдѣ *двѣ трети* его? И *одна треть* и *двѣ трети* суть дроби.

У. **Вмѣсто** *трехъ третей* **квадрата, что получимъ?**

Д. **Опять цѣлый квадратъ.**

У. **Это собраніе сколькихъ частей?**

Д. **Трехъ равныхъ частей.**

У. **Чтобы получить дробь, сколько такихъ частей можно взять?**

Д. **Можно взять или** *одну* **или** *двѣ* **части.**

У. **Сколько къ двумъ третямъ должно прибавить еще такихъ же частей, чтобы получить цѣлое?**

Д. *Одну треть.*

У. **А къ одной трети сколько нужно прибавить?**

Д. *Двѣ трети.*

Равнымъ образомъ проходитъ учитель и всѣ прочіе ряды.

Гдѣ *одна пятая*? Гдѣ *одна десятая*?—Покажите *три четверти* цѣлаго. — Гдѣ *восемь девятыхъ* частей? Сколько *седьмыхъ* должно взять для полученія цѣлаго?—Который квадратъ раздѣленъ на 8 равныхъ частей?—Отсчитайте *пять шестыхъ* цѣлаго.

Цѣль упражненія достигнута, если дѣти научатся: во-1-хъ, смотрѣть на каждое нераздѣльное количество, какъ на *цѣлое*; во 2 хъ, раздѣлять *цѣлое* на 2, 3, 4, 5 и проч. равныхъ частей, и въ 3-хъ,

точнымъ образомъ опредѣлять число частей, входящихъ въ составъ цѣлаго.

Общіе вопросы.

1) Какъ называется часть единицы, раздѣленной на 7, 9, 13, 20 равныхъ частей?
2) Что получится, если единицу раздѣлить на 5, 8, 11 равныхъ частей?
3) Какъ получить: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{25}$?
4) Что такое: *пятая, осьмая, одиннадцатая* доля?
5) Что такое: $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{9}$?
6) Чѣмъ $\frac{9}{14}$ менѣе цѣлаго?
7) Сколько не достаетъ въ $\frac{5}{6}$ для составленія цѣлаго?
8) Назовите нѣсколько дробей, и покажите, какъ онѣ составились?

№ 34. ВТОРОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Разсматриваніе цѣлыхъ чиселъ меньшаго наименованія, какъ дробныя числа большаго, того же самаго рода.

Нѣкоторыя величины въ отношеніи самихъ себя суть цѣлыя, а въ отношеніи другихъ величинъ могутъ быть дробными; таковы суть, напримѣръ, мѣры вѣса, длины и проч.

Такъ *четверикъ* есть цѣлое число, а въ отношеніи четверти есть $^1/_8$ ея. *Пятакъ* самъ по себѣ есть цѣлое число, но вразсужденіи рубля составляетъ $^1/_{20}$.

1 копѣйка = $^1/_{100}$ рубля.
2 — = $^2/_{100}$ —
3 — = $^3/_{100}$ —
27 — = $^{27}/_{100}$ —
и т. д.

1 день есть $^1/_{30}$ мѣсяца
2 дня — $^2/_{30}$ —
и т. д.

Вообще здѣсь представляется учителю возможность занимать учениковъ цѣлыми рядами дробныхъ чиселъ. Наконецъ онъ доведетъ ихъ до того, что они будутъ взирать на каждое цѣлое число мѐньшаго наименованія какъ на дробь вразсужденіи однороднаго съ нимъ числа бо̀льшаго наименованія.

№ 35. ТРЕТІЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Двоякое происхожденіе дробей.

Теперь дѣло учителя ознакомить учениковъ съ двоякимъ происхожденіемъ дроби.

Дробь произойдетъ, если отъ какого-либо цѣлаго, или единицы, будетъ взята одна или нѣсколько равныхъ частей, и также, если мѐньшее число раздѣлится на бо̀льшее.

У. Покажите на таблицѣ *три четверти* цѣлаго квадрата.

Д. Вотъ *три четверти* цѣлаго квадрата (указывая на три части перваго квадрата четвертаго горизонтальнаго ряда).

У. Какъ получаются эти *три четверти?*

Д. Цѣлый квадратъ дѣлится на *четыре* равныя части, и берется такихъ частей *три.*

У. (указывая на три первые квадрата четвертаго горизонтальнаго ряда) сколько тутъ цѣлыхъ квадратовъ?

Д. Здѣсь *три* цѣлые квадрата.

У. Покажите *четвертую* часть перваго квадрата.

Д. Вотъ *четвертая* и проч.

У. Гдѣ четвертая часть втораго квадрата?

Д. Вотъ и проч.

У. А четвертая часть третьяго?

Дѣти указываютъ на неё.

У. Итакъ, что составляетъ четвертая часть трехъ квадратовъ?

Д. *Три четверти одного* цѣлаго квадрата.

У. Предъ этимъ, для полученія трехъ четвертей квадрата, мы раздѣляли квадратъ на четыре равныя части; теперь же какимъ образомъ получили *три четверти* цѣлаго?

Д. Чрезъ отдѣленіе по одной четверти отъ каждаго изъ трехъ цѣлыхъ квадратовъ.

У. Это все тоже, что взять вдругъ *четвертую* долю отъ *всѣхъ трехъ* квадратовъ, или проще, *три* раздѣлить на *четыре*.

У. Слѣдственно, какъ можно получить дробь $^3/_4$?

Д. Чрезъ раздѣленіе числа 3 на число 4.

У. Итакъ, подъ именемъ дроби можно также понимать частное, происходящее отъ раздѣленія меньшаго числа на большее.

У. Гдѣ здѣсь дѣлимое?

Д. Число *три* есть дѣлимое.

У. А дѣлитель?

Д. Число *четыре*.

У. А частное?

Д. Дробь *три четверти*.

У. Что означаютъ слѣдующія дроби: $^2/_3$, $^6/_7$, $^5/_9$?

Д. Первая, что число 2 раздѣлено на число 3, вторая, что число 6 раздѣлено на число 7 и т. д.

У. Объясните, какимъ образомъ можно получить $^5/_6$ цѣлаго.

Д. Для полученія *пяти шестыхъ* цѣлаго (указывая на первый квадратъ шестаго ряда) надобно цѣлое раздѣлить на 6 равныхъ частей и взять *пять* такихъ частей, или также, отъ каждаго изъ шести цѣлыхъ (указывая на первые шесть квадратовъ шестаго горизонтальго ряда) взять по *одной* части, что все тоже, если *пять* раздѣлимъ на *шесть*.

Какимъ двоякимъ образомъ можно разсматривать дробь $\frac{7}{8}$?

У. Поэтому дробь можетъ произойти:

1) отъ раздѣленія единицы на извѣстныя одинакія части;

2) отъ раздѣленія меньшаго числа (нѣсколькихъ единицъ) на бо̀льшее.

Такъ: *три раза взятая осьмая часть* единицы равна *осьмой* части *трехъ* единицъ; *пятая часть трехъ* единицъ равна *три* раза взятой *пятой* части единицы, и проч.

Тутъ, какъ и вездѣ, должно пользоваться случаемъ, чтобы посредствомъ примѣненій привести истину въ бо̀льшую ясность.

Ученикъ знаетъ, напримѣръ, что 1 рубль содержитъ въ себѣ 20 пятаковъ, $^1/_5$ руб. = 4 пят., $^1/_5$ трехъ рублей = 3×4 пят. или 12 пятакамъ. Итакъ, три раза взятая пятая часть рубля все тоже, что пятая часть трехъ рублей.

Три раза взятая четвертая часть ($^3/_4$) фунта (=32 лот.) равна $^1/_4$ трехъ фунтовъ; потому что, $^1/_4$ фунта = 8 лотамъ; 3 раза $^1/_4$ ф. = 3 × 8 л. или 24 лотамъ. Четвертая часть 1 ф. = 8 лот.; поэтому четвертая часть трехъ фунтовъ въ 3 раза болѣе 8 лот., или 24 лота.

№ 36. ЧЕТВЕРТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Изображеніе дробей цифрами.

Отъ всякаго отдѣльнаго изустнаго упражненія должно тотчасъ переходить къ циферному письму. Такой переходъ отъ видимыхъ предметовъ къ условнымъ знакамъ, каковы суть цифры, весьма вѣрнымъ путемъ ведетъ ученика къ внутренней созерцательности, въ развитіи которой и заключается вообще трудная задача элементарнаго преподаванія.

У. Что надобно сдѣлать съ цѣлымъ, чтобы получить половину его?

Д. Надобно цѣлое *раздѣлить на двѣ равныя части.*

У. Посредствомъ какой цифры изображается всякое цѣлое число, или единица?

Д. Посредствомъ первой цифры, а именно: 1.

У. Какою цифрою изображается *два*?

Дѣти означаютъ цифру 2.

У. Вы сказали, что для полученія *половины* цѣлаго надобно это цѣлое раздѣлять на *двѣ равныя* части; поэтому какимъ образомъ всего удобнѣе изобразить цифрами *половину* единицы?

Д. Черезъ раздѣленіе цифры 1 на 2.

У. Для изображенія дѣленія бóльшаго числа на мѐньшее, обыкновенно употребляютъ знакъ двоеточія (:), но какой знакъ мы уже прежде употребляли, для показанія того, что мѐньшее число раздѣлено на бóльшее, чтобы отдѣлить первый родъ дѣленія отъ втораго?

Д. Небольшую черточку (—).

У. Какъ же изобразить, что 1 раздѣлена на 2?

Д. Вотъ такъ: $^1/_2$.

У. Какъ надобно читать такое выраженіе?

Д. *Одна вторая* или *половина цѣлаго.*

У. Поэтому какъ выразить *одну треть*?

Д. Чрезъ $^1/_3$.

У. Почему?

Д. Для полученія трети цѣлаго, надобно единицу раздѣлить на три равныя части, что и изобразится, если сперва напишемъ цифру 1, подъ нею проведемъ черточку, за которою поставимъ цифру 3.

У. Изобразите на своихъ доскахъ: *половину*, *треть*, *четверть*, *пятую*, *шестую*, *седьмую*, *осьмую*, *девятую* и *десятую* доли цѣлаго.

Дѣти пишутъ: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{10}$.

У. Какія цифры въ этихъ выраженіяхъ, верхнія или нижнія, показываютъ, на сколько частей каждый разъ цѣлое было раздѣлено?

Д. Нижнія цифры.

У. Что показываетъ, напримѣръ, цифра 5 въ выраженіп: $\frac{2}{5}$?

Д. Что цѣлое было раздѣлено на 5 равныхъ частей.

У. А что означаетъ верхняя цифра?

Д. Число частей, взятыхъ отъ цѣлаго.

У. Итакъ, сколькими числами выражается каждая дробь?

Д. Двумя.

У. Нижнее число въ каждой дроби означаетъ всегда, на сколько частей единица была раздѣлена, а верхняя — сколько такихъ частей было взято. Первое называется *знаменателемъ* дроби, а второе — *числителемъ* ея. Оба числа вмѣстѣ, выражающія собою дробь, именуются ея *членами*.

Знаменатель соотвѣтствуетъ всегда вопросу: *какія части?* (пятыя, седьмыя, двѣнадцатыя), а числитель: *сколько такихъ частей взято?* (двѣ, три, пять). Также, какъ мы уже видѣли, если дробь есть выраженіе частнаго, то числитель соотвѣтствуетъ дѣлимому, а знаменатель дѣлителю.

У. Вотъ нѣсколько дробей: $^4/_7$, $^2/_3$, $^5/_6$, $^8/_9$, $^7/_{10}$; наименуйте ихъ знаменателей и числителей.

Д. Числители суть: 4, 2, 5, 8, 7; знаменатели: 7, 3, 6, 9, 10.

Этого достаточно, чтобы ученики могли теперь переложить изустныя исчисленія предыдущихъ нумеровъ въ циферныя. Полезно занимать здѣсь учениковъ послѣдовательными рядами.

Такъ, напримѣръ:

a) $1 = {}^2/_2 = {}^3/_3 = {}^4/_4 = {}^5/_5 = {}^6/_6 = {}^7/_7$ и т. д.

b) $1 = {}^1/_2 + {}^1/_2$;

$1 = {}^1/_3 + {}^1/_3 + {}^1/_3 = {}^1/_3 + {}^2/_3$;

$1 = {}^1/_4 + {}^1/_4 + {}^1/_4 + {}^1/_4 = {}^2/_4 + {}^2/_4 = {}^1/_4 + {}^3/_4$;

$1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}$
$= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$; и проч. и проч.

№ 37. ПЯТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Взаимное сравненіе дробей.

У. Которая часть цѣлаго болѣе, *одна половина* или *одна треть*?

Д. *Половина.*

У. Почему?

Д. Потому что въ цѣломъ половинъ только двѣ, а третей три (въ тоже время указывая на таблицу).

У. Что менѣе *одна пятая* или *одна седьмая* того же цѣлаго?

Д. Одна *седьмая.*

У. Почему?

Д. Потому что для полученія *седьмой* части, надобно цѣлое раздѣлить на *семь равныхъ* частей, а для полученія *пятой* только на *пять* частей.

У. Я согласенъ съ вами, что *половина* болѣе *трети*, *треть* болѣе *четверти*, и т. д., но какъ мнѣ докажите, напримѣръ, что *двѣ пятыя* болѣе *двухъ шестыхъ* того же цѣлаго?

Д. Число частей въ обѣихъ дробяхъ одинаково; но каждая *пятая* часть болѣе каждой *шестой* того же цѣлаго; поэтому и *двѣ пятыя* болѣе *двухъ шестыхъ*.

У. (упражняя по таблицѣ). *Одна половина* болѣе какой части?

Д. Одной *трети.*

У. А *треть?*

Д. Болѣе *четверти.*

У. Далѣе!

Д. *Четверть* болѣе *пятой* доли, *пятая* болѣе *шестой, шестая* болѣе *седьмой,* и т. д.

У. Если въ году 12 мѣсяцевъ, то въ половинѣ года сколько мѣсяцевъ?

Д. 6 мѣсяцевъ.

У. А въ трети?

Д. 4 мѣсяца.

У. Такъ! въ шестой части года только 2 мѣсяца, а въ двѣнадцатой части—*одинъ* мѣсяцъ.

Д. Къ какому замѣчанію ведутъ насъ эти сравненія?

У. *Чѣмъ на бо́льшее число частей дѣлится цѣлое, или какое-либо число, тѣмъ части становятся менье.*

Д. Поэтому и обратно: *чѣмъ мельче части, на которыя раздѣлено цѣлое, тѣмъ болѣе входитъ ихъ въ составъ его.*

У. Которая изъ двухъ дробей, $^2/_5$ или $^2/_4$, болѣе?

Д. $^2/_4$ болѣе $^2/_5$.

У. Почему?

Д. $^2/_4$ значитъ четвертая часть отъ двухъ цѣлыхъ, а $^2/_5$ пятая часть отъ тѣхъ же двухъ цѣлыхъ.

У. Въ которой дроби знаменатель болѣе?

Д. Въ дроби $\frac{2}{5}$.

У. А каковы числители этихъ дробей?

Д. Одинакіе.

У. (пишетъ нѣсколько дробей съ равными числителями, но съ разными знаменателями):

$^5/_7$, $^5/_9$, $^5/_{11}$, $^5/_6$.

Которая изъ этихъ дробей болѣе прочихъ?

Д. Послѣдняя, т. е. $^5/_6$.

У. Почему она болѣе другихъ?

Д. Дробь $^5/_6$ показываетъ, что отъ 5 ц. взята *шестая* часть, между тѣмъ, какъ прочими дробями означаются *седьмая*, *девятая* и *одиннадцатая* части отъ тѣхъ же 5 цѣлыхъ.

У. У которой изъ этихъ дробей самый большой знаменатель?

Д. У $^5/_{11}$.

У. А которая изъ нихъ менѣе всѣхъ прочихъ?

Д. $^5/_{11}$.

У. Что можно здѣсь замѣтить?

Д. *Изъ дробей, имѣющихъ одинакихъ числителей, та менѣе, у которой знаменатель болѣе прочихъ знаменателей.*

У. (пишетъ двѣ дроби съ равными знаменателями, но съ разными числителями):

$^5/_8$, $^7/_8$,

которая изъ этихъ дробей болѣе?

Д. Вторая.

У. Почему?

Д. Въ дроби $^7/_8$ не достаетъ только одной осьмой для составленія цѣлаго, а въ дроби $^5/_8$ не достаетъ такихъ частей *три*.

У. Итакъ, изъ двухъ дробей, имѣющихъ одинакихъ знаменателей, но разныхъ числителей, которая больше?

Д. Та, у которой числитель больше.

У. Поэтому справедливо: *изъ всѣхъ дробей съ одинаками знаменателями бо́льшая есть та, у которой числитель болѣе всѣхъ прочихъ числителей.*

Послѣ этого можно занимать учениковъ такими послѣдовательными рядами:

1) $^{1}/_{2}>^{1}/_{3}$; $^{1}/_{3}>^{1}/_{4}$; $^{1}/_{4}>^{1}/_{5}$; $^{1}/_{5}>^{1}/_{6}$, и т. д.
2) $^{2}/_{2}>^{2}/_{3}$; $^{2}/_{3}>^{2}/_{4}$; $^{2}/_{4}>^{2}/_{5}$; $^{2}/_{5}>^{2}/_{6}$, и т. д.
3) $^{3}/_{4}>^{3}/_{5}$; $^{3}/_{5}>^{3}/_{6}$; $^{3}/_{6}>^{3}/_{7}$; $^{3}/_{7}>^{3}/_{8}$, и т. д.

Обратно:

1) $^{1}/_{10}<^{1}/_{9}$; $^{1}/_{9}<^{1}/_{8}$; $^{1}/_{8}<^{1}/_{7}$; $^{1}/_{7}<^{1}/_{6}$; $^{1}/_{6}<^{1}/_{5}$, и т. д.
2) $^{2}/_{10}<^{2}/_{9}$· $^{2}/_{9}<^{2}/_{8}$ $^{2}/_{8}<^{2}/_{7}$, $^{2}/_{7}<^{2}/_{6}$; $^{2}/_{6}<^{2}/_{5}$, и т. д.

и проч. и проч.

№ 38. ШЕСТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Различные роды дробей.

1) Каждая изъ дробей: $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{3}$, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{5}$, $^{1}/_{6}$ и т. д. выража́етъ собою одну часть цѣлаго, или единицы, раздѣленной на равныя части; напротивъ, дроби: $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$, [illegible]$/_{5}$, $^{6}/_{9}$, $^{7}/_{8}$ и проч. означаютъ соединеніе нѣсколькихъ частей цѣлаго, раздѣленнаго также на равныя части. Первыя, т. е. всѣ тѣ, которыя имѣютъ числителемъ единицу называются *основными* (простыми) дробями; а вторыя, у которыхъ числители суть числа 2, 3, 4, 5, и т. д., *сложными*, потому что онѣ составлены изъ повторенія или сложенія основныхъ дробей. По этому дробь можетъ означать одну или нѣсколько частей цѣлаго.

У. Объясните, ка́къ *сложная* дробь составляется изъ *основной* или *простой?*

Д. Возьмемъ дробь $^6/_9$. Эта дробь есть сложная, потому что числитель ея есть сложное число. Дробь $^6/_9$ получится, если повторить основную дробь $^1/_9$ шесть разъ, а именно: $^6/_9 = ^1/_9 + ^1/_9 + ^1/_9 + ^1/_9 + ^1/_9 + ^1/_9$.

1) Назовите нѣсколько основныхъ дробей.

2) Означьте нѣсколько сложныхъ дробей.

3) Наименуйте нѣсколько сложныхъ дробей, которыя имѣли бы знаменателемъ число 16.

4) Напишите нѣсколько сложныхъ дробей съ одинакими числителями, но съ разными знаменателями.

2) *У.* Вотъ вамъ три дроби:

$$^7/_7,\ ^4/_7,\ ^{12}/_7,$$

скажите, что выражаетъ каждая изъ нихъ?

Д. Первая есть *семь седьмыхъ*, т. е. она показываетъ, что цѣлое было раздѣлено на *семь равныхъ* частей, и такихъ частей взято *семь*; вторая, $^5/_7$, означаетъ, что отъ цѣлаго, раздѣленнаго также на 7 равныхъ частей, взято 5 долей, а третья, $^{12}/_7$, что такихъ частей взято 12.

У. Что надобно прибавить къ $^7/_7$ для полученія цѣлаго?

Д. Ничего не надобно прибавить, потому что *семь седьмыхъ* означаетъ полное цѣлое.

У. Точно такъ! выраженіе $^7/_7$ имѣетъ только видъ дроби, а въ сущности не есть дробь.

У. Наименуйте нѣсколько такихъ дробей!

Д. $^5/_5$, $^6/_6$, $^{10}/_{10}$, $^{13}/_{13}$ и т. д.

У. Вообще какія это дроби?

Д. *Всѣ тѣ дроби, у которыхъ числитель равенъ знаменателю.*

У. Которое изъ написанныхъ мною выраженій есть настоящая дробь?

Д. Выраженіе $^4/_7$.

У. Почему?

Д. Потому что оно менѣе цѣлаго.

У. Что же такое значитъ выраженіе $^{12}/_7$?

Д. $^{12}/_7$ тоже не есть выраженіе настоящей дроби.

У. Почему?

Д. Потому что $^{12}/_7$ не менѣе, а болѣе цѣлаго.

У. Объясните это!

Д. Дробь $^{12}/_7$ можно разложить такъ: $^7/_7 + ^5/_7$. Но $^7/_7 = 1$ ц.; по этому $^{12}/_7 = 1$ ц. $+ ^5/_7$ ц. Значитъ, что въ выраженіи $^{12}/_7$ кромѣ цѣлаго заключается еще *пять седьмыхъ* другаго цѣлаго.

У. Хорошо! такія-то дроби, у которыхъ числители болѣе знаменателей, такъ какъ не суть настоящія, называются *несобственными* или *неправильными* дробями. Какія же суть *собственныя* или *правильныя*?

Д. *Конечно тѣ, у которыхъ числитель менѣе своего знаменателя.* Но почему такія выраженія, которыя болѣе цѣлаго, называются также дробями, хотя и неправильными?

У. Потому именно, что они имѣютъ видъ дроби, и что въ такихъ выраженіяхъ мы часто нуждаемся въ исчисленіи, какъ мы увидимъ впослѣдствіи. Они тоже, какъ и правильныя дроби, означаютъ собраніе частей.

У. Слѣдственно, какъ вообще раздѣляются дроби?

Д. На *правильныя* и *неправильныя.*

Что такое *правильная* дробь?—А *неправильная?*—Какая разница между ними?—Выражен я, каковы напримѣръ, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{11}{11}$, къ какимъ дробямъ скорѣе отнести можно, къ правильнымъ или неправильнымъ?—Почему?—

У. Правильная дробь есть выраженіе какого частнаго?

Д. У котораго дѣлимое *менѣе* дѣлителя.

У. А неправильная дробь?

Д. У котораго дѣлимое *болѣе* дѣлителя.

У. Что же означаютъ такія выраженія, у которыхъ числитель и знаменатель суть одинакія между собою числа?

Д. Такія выраженія означаютъ дѣленіе, въ которомъ дѣлимое и дѣлитель суть равныя между собою числа.

У. Чему равно бываетъ въ такомъ случаѣ частное?

Д. Всегда равно единицѣ.

У. Поэтому, какія изъ дробныхъ выраженій равны единицѣ?

Д. *Всѣ тѣ, у которыхъ числители одинаковы съ своими знаменателями.*

У. (написавъ на доскѣ

$$2^1/_2,\ 3^5/_6,\ 7^2/_3).$$

Въ этихъ выраженіяхъ вмѣстѣ съ дробями находятся цѣлыя числа, и потому такія выраженія называются *смѣшанными* числами.

Чтобы отстранить отъ преподаванія всякій односторонній обзоръ, учитель, занимая учениковъ

сколько возможно болѣе примѣрами, долженъ требовать, чтобы они каждый разъ объясняли ему причину, почему такое-то выраженіе называется правильною или неправильною дробью, и проч.

Разборъ чиселъ: $^2/_7$, $^5/_5$, $^{10}/_8$, $3^3/_4$.

Выраженіе $^2/_7$ есть дробь, потому что означаетъ двѣ части цѣлаго, раздѣленнаго на 7 равныхъ частей. Эта дробь правильная, потому что менѣе цѣлаго, или, въ ней числитель менѣе знаменателя.

Выраженіе $^5/_5$ имѣетъ только видъ дроби, а въ сущности есть цѣлое. Это выраженіе собственно показываетъ, на какія части цѣлое было раздѣлено.

$^{10}/_8$ есть неправильная дробь; *дробь*, ибо выражаетъ число частей, *неправильная*, потому что означаетъ число частей, превышающее то, на которое цѣлое было раздѣлено; въ ней знаменатель менѣе числителя—новый признакъ неправильности. Такое выраженіе скрытнымъ образомъ содержитъ въ себѣ и цѣлое число и правильную дробь.

Дѣйствительно, $^{10}/_8 = {}^8/_8 + {}^2/_8 = 1^2/_8$ ц.

Можетъ-ли иногда въ такой дроби заключаться два, три и болѣе цѣлыхъ?

Выраженіе: $5^3/_4$ называется смѣшаннымъ числомъ, потому что представляетъ совокупленіе 5 цѣлыхъ и правильной дроби $^3/_4$

5. Если дроби имѣютъ одинакихъ знаменателей, то называются *однородными* или *одноименными*.

Отчего всякая дробь получаетъ свое имя, отъ числителя или знаменателя? —

Дроби съ разными знаменателями именуются *разнородными* или *разноименными*

Назовите нѣсколько однородныхъ дробей.—Назовите двѣ разнородныя дроби.—Наименуйте нѣсколько дробей, изъ которыхъ было бы столько же однородныхъ, сколько и неоднородныхъ.

Итакъ числа бываютъ:

1. *Цѣлыя:* 2, 3, 5, 10, 48 и проч.
2. *Дроби:*
   a. 1. *Основныя:* $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_9$ и т. д.
      2. *Сложныя:* $^7/_8$, $^9/_{13}$, $^2/_3$ и т. д.
   b. 1. *правильныя:* $^3/_4$, $^8/_9$, $^5/_6$ и т. д.
      2. *неправильныя:* $^7/_3$, $^{10}/_8$, $^{13}/_{11}$ и т. д.
   c) 1. *однородныя:* $^3/_7$, $^4/_7$, $^5/_7$,
      2. *неоднородныя:* $^3/_4$, $^6/_9$, $^{13}/_{14}$ и т. д.
3. *Смѣшанныя:* $5^4/_7$, $2^1/_2$, $4^1/_8$, $5^4/_9$, и т. д.

Примѣчаніе. Правила обращенія цѣлыхъ и смѣшанныхъ чиселъ въ неправильныя дроби, и обратно, будутъ выведены съ бо̀льшею наглядностію, если мы снова прибѣгнемъ ко второй таблицѣ чиселъ.

N° 39. СЕДЬМОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Обращеніе цѣлыхъ и смѣшанныхъ чиселъ въ дроби, и обратно.

У. (указывая на два первые квадрата втораго горизонтальнаго ряда). Сколько тутъ всего половинъ?

Д. Здѣсь всего *четыре* половины.

У. Почему?

Д. Здѣсь два цѣлые квадрата; каждый изъ нихъ раздѣленъ на двѣ половины; поэтому всего будетъ 2×2, или *четыре* половины.

У. (указывая вдругъ на три квадрата того же ряда). Много-ли тутъ половинъ?

Д. *Шесть половинъ.*

У. Почему?

Д. Потому что 3×2 половины составляютъ шесть половинъ.

Отъ трехъ цѣлыхъ учитель переходитъ къ четыремъ, пяти и т. д., и заставляетъ учениковъ опредѣлять число половинъ въ каждомъ случаѣ. Такимъ же образомъ поступаетъ въ отношенiи третей, четвертей, пятыхъ и проч.

Примѣненiя. Сколько половинъ въ четырехъ цѣлыхъ? А въ семи?. Почему? Восемь яблоковъ раздѣлено между неизвѣстнымъ числомъ дѣтей, и каждое дитя получило по $\frac{1}{4}$ яблока. Узнайте, сколько было дѣтей?—Въ 9 часахъ сколько получасовъ?—Узнайте, сколько всего шестыхъ долей въ 8 ц.—$\frac{49}{7}$ сколько цѣлыхъ составляютъ?—Куплено сукна 32 четверти аршина: сколько куплено всего аршинъ?—Если въ каждый день издерживать по одной четвертой долѣ рубля, то во сколько времени будетъ издержано 8 рублей?

Отъ чиселъ, которыхъ изображенiя можно найти въ таблицѣ, учитель мало-по-малу переходитъ къ болѣе сложнымъ числамъ; напримѣръ: въ 13 цѣлыхъ сколько седьмыхъ?

Рѣшенiе. Въ 13 цѣлыхъ 91 седьмая доля; потому что въ каждомъ цѣломъ 7 седьмыхъ; въ 13 ц. 13 разъ 7 седьмыхъ, или 91 седьмая.

У. Сколько всего девятыхъ долей въ 27 цѣлыхъ?

Д. 9×27 или 243 девятыя доли. Число 27 состоитъ изъ 20 и 7; на 10 ц. приходится 10×9 или 90 девятыхъ; на 20 ц., 2×90 или 180 девятыхъ; на 7 ц., 63 дев.; 180 д. $+ 63$ д. $= 243$ девятымъ.

У. (показывая на квадратъ и еще половину другаго квадрата втораго горизонтальнаго ряда). Много-ли тутъ всего половинъ?

Д. Тутъ всего *три половины.*

У. Сколько это составляетъ цѣлыхъ квадратовъ?

Д. *Одинъ цѣлый* квадратъ и *еще половину* другаго квадрата.

У. Поэтому всего сколько цѣлыхъ?

Д. *Полтора* цѣлаго.

У. (указывая на пять половинъ). Сколько здѣсь цѣлыхъ?

Д. *Два* цѣлые и *еще половина* цѣлаго, или 2 съ половиною.

У. Почему?

Д. Потому что 5 половинъ все равно, что 2×2 пол. $+ 1$ пол.; 2 пол. $= 1$ ц.; 2 раза 2 пол $= 2$ ц.; 2 ц. $+ \frac{1}{2}$ ц $= 2\frac{1}{2}$ цѣлымъ.

По прохожденіи втораго ряда, должно обратиться къ третьему.

У. (указывая на 8 частей третьяго горизонтальнаго ряда). Какъ называется каждая изъ этихъ долей?

Д. *Третьею частію цѣлаго.*

У. Сколько тутъ всего третей?

Д. *Восемь.*

У. Много-ли же цѣлыхъ?

Д. *Два цѣлые* и еще *двѣ трети* третьяго цѣлаго.

У. Почему?

Д. Потому что каждое цѣлое состоитъ изъ трехъ третей; 3 трети въ 8 третяхъ содержатся

2 *раза съ остаткомъ два*; поэтому въ 8 третяхъ 2 цѣлыхъ $+ \frac{2}{3}$ цѣлаго.

Упражненіе равнымъ образомъ продолжается по всѣмъ прочимъ рядамъ.

Послѣ изустныхъ занятій слѣдуютъ письменныя.

Ученики пишутъ:

a) 2 ц. $= \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6}$ и т. д.
3 ц. $= \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{18}{6}$ и т. д.
4 ц. $= \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \frac{20}{5} = \frac{24}{6}$ и т. д.

и проч. и проч.

b) 1) $\frac{2}{2}=1$;	2) $\frac{3}{3}=1$;	3) $\frac{4}{4}=1$
$\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$;	$\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$;	$\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$ и т. д.
$\frac{4}{2}=2$;	$\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$;	
$\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$;	$\frac{6}{3}=2$;	

и проч. и проч.

c) 1) $\frac{100}{2}=50$;	2) $\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}$	3) $\frac{100}{4}=25$;
$\frac{99}{2}=49\frac{1}{2}$;	$\frac{99}{3}=33$;	$\frac{99}{4}=24\frac{3}{4}$;
$\frac{98}{2}=49$;	$\frac{98}{3}=32\frac{2}{3}$;	$\frac{98}{4}=24\frac{2}{4}$ и т. д.
$\frac{97}{2}=48\frac{1}{2}$	$\frac{97}{3}=32\frac{1}{3}$	

и проч. и проч.

d) 1) $1 = \frac{2}{2}$;	2) $1 = \frac{3}{3}$;	3) $1 = \frac{4}{4}$;
$1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;	$1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$;	$1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$;
$2 = \frac{4}{2}$;	$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$;	$1\frac{2}{4} = \frac{6}{4}$;
$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$;	$2 = \frac{6}{3}$;	$1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$;
$3 = \frac{6}{2}$;	$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$;	$2 = \frac{8}{4}$;
$3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$;	$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$;	$2\frac{1}{3} = \frac{7}{4}$;
и проч.	и проч.	$2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ и т. д.

У. Узнайте, сколько 2, 3, 4, 5 ц. имѣютъ пятыхъ.

Д. 2 ц. $= \frac{10}{5}$; 3 ц. $= \frac{15}{5}$; 4 ц. $= \frac{20}{5}$; 5 ц. $= \frac{25}{5}$.

У. Какимъ образомъ вы получили $\frac{10}{5}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{20}{5}$?

Д. Если на каждое цѣлое приходится $^5/_5$, то на два цѣлые придется $2 \times {}^5/_5$ или $^{10}/_5$; то на 3 ц. — $3 \times {}^5/_5$ или $^{15}/_5$, и т. д.

У. Что тутъ вы дѣлали съ цѣлымъ числомъ, при приведенiи его въ дробь?

Д. Цѣлое число помножали на число частей, въ которыхъ должна быть выражена искомая дробь.

У. Полученное произведенiе означаетъ здѣсь числителя или знаменателя искомой дроби?

Д. Полученное произведенiе означаетъ числителя искомой дроби, которой знаменателемъ послужитъ число, выражающее требуемыя части. Такъ, если какое - либо цѣлое число нужно привести въ шестыя доли, то знаменателемъ будетъ 6, въ седьмыя — *семь*, и т. д.

У. Вслѣдствiи этого правила, кàкъ надобно поступить, напримѣръ, при обращенiи 49 цѣлыхъ въ 13 доли?

Д. 49 умножить на 13, и подъ произведенiемъ этихъ чиселъ (637) подписать, вмѣсто знаменателя, то же число 13. Вотъ такъ: $^{637}/_{13}$.

У. Какъ же обратить смѣшанное число, напримѣръ, $3^5/_8$ въ неправильную дробь?

Д. Привести $3^5/_8$ въ неправильную дробь тоже значитъ, что узнать, сколько вмѣсто $3^5/_8$ можно имѣть всего осьмыхъ долей. Въ такомъ случаѣ число 3 приводится въ осьмыя доли, и къ полученному числу прибавляется еще $\frac{5}{8}$. 3 ц. $= 3 \times 8$ или 24 осьмымъ; 24 осьмыхъ $+ {}^5/_8$ составляютъ $^{29}/_8$.

У. Это можно представить такъ:

$$3^5/_8 = \frac{3 \times 8}{8}, + \frac{5}{8} = \frac{3 \times 8 + 5}{8} = {}^{29}/_8.$$

Поэтому, изъ какихъ чиселъ состоитъ здѣсь числитель требуемой неправильной дроби?

Д. Изъ $3 \times 8 + 5$.

У. Что означаетъ въ этомъ примѣрѣ число 3?

Д. Цѣлое.

У. А восемь?

Д. Знаменателя дроби.

У. Слѣдственно, 3×8?

Д. Произведеніе цѣлаго числа на знаменателя.

У. $3 \times 8 + 5$?

Д. Сумму числителя и произведенія цѣлаго на знаменателя.

У. Что представляетъ собою эта сумма въ неправильной дроби?

Д. Числителя.

У. Какъ же получить числителя неправильной дроби при обращеніи какого-либо смѣшаннаго числа въ неправильную дробь?

Д. Надобно цѣлое число умножить на знаменателя стоящей подлѣ него дроби, и къ произведенію придать числителя той же дроби.

У. Что же будетъ знаменателемъ такой дроби?

Д. Знаменателемъ такой неправильной дроби будетъ знаменатель той же дроби, которая вмѣстѣ съ цѣлымъ составляетъ обращаемое смѣшанное число.

У. Такое дѣйствіе въ Ариѳметикѣ обыкновенно называется приведеніемъ смѣшаннаго числа въ неправильную дробь, или построеніемъ дроби изъ смѣшаннаго числа.

Мы нарочно распространились здѣсь съ тою цѣлію, чтобы показать учителю, какимъ образомъ

онъ долженъ поступать при сообщеніи своимъ ученикамъ всякаго новаго опредѣленія или правила. По возможности надобно стараться, чтобы ученики сами извлекали правила изъ примѣровъ; но, нѣтъ сомнѣнія, что пособіе въ этомъ случаѣ, со стороны учителя, все еще остается слишкомъ важнымъ. Многословіе и темнота выраженій суть обыкновенныя свойства дѣтей, слабо владѣющихъ языкомъ; дѣло учителя пояснять и сокращать такія выраженія.

Съ тою же постепенностію, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, учитель доводитъ учениковъ до слѣдующихъ замѣчаній:

Цѣлое число исключается изъ неправильной дроби чрезъ раздѣленіе ея числителя на знаменателя.

Во всякомъ случаѣ, если знаменатель неправильной дроби содержится въ числителѣ ея одинъ или нѣсколько разъ безъ остатка, дробь равна цѣлому числу, и есть только видоизмѣненіе его.

Если же знаменатель не содержится въ числителѣ равнаго числа разъ, безъ остатка, въ такомъ случаѣ получается смѣшанное число: частное, происходящее отъ раздѣленія числителя на знаменателя, будетъ означать цѣлое, а остатокъ, получаемый отъ дѣленія, числителя новой дроби, которой знаменателемъ будетъ служить знаменатель той же неправильной дроби.

Какія правила извлекли мы изъ предлежащаго упражненія? Въ чемъ состоитъ первое, второе, третіе? Въ какомъ случаѣ должно употреблять то, другое? Объясните примѣрами.

Примѣненія. Нѣкто ежедневно издерживаетъ по $\frac{1}{3}$ руб.; сколько издерживаетъ онъ въ мѣсяцъ (30 д.)?—Если ежедневно

употреблять для топки дома по $\frac{1}{4}$ сажени дровъ, то многоли саженъ дровъ будетъ издержано впродолженіи 5 мѣсяцевъ? — $5\frac{3}{4}$ листа бумаги роздано ученикамъ; каждому досталось по $\frac{1}{4}$ листа. Сколько было учениковъ? — 5 рублей роздано 25 нищимъ поравно. По какой части рубля получилъ каждый изъ нихъ?

Въ слѣдущихъ упражненіяхъ (отъ № 40 до № 44) объясняются различныя измѣненія дробей.

№ 40. ОСЬМОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Разложеніе, сложеніе и вычитаніе однородныхъ дробей.

Какъ цѣлое число можно разложить на меньшія, тоже цѣлыя числа, такъ и каждую сложную дробь на ея основныя части.

По второй таблицѣ, а также на доскѣ посредствомъ цифръ, учитель упражняетъ дѣтей въ рѣшеніи такихъ примѣровъ:

a) $^8/_{11}={}^4/_{11}+{}^4/_{11}$ или $^2/_{11}+{}^2/_{11}+{}^2/_{11}+{}^2/_{11}$, или $^7/_{11}+{}^1/_{11}={}^3/_{11}+{}^4/_{11}+{}^1/_{11}$ и т. д.

b) $^{15}/_7={}^6/_7+{}^6/_7+{}^3/_7={}^4/_7+{}^6/_7+{}^5/_7$ и т. д.

c) $3^5/_6={}^{18}/_6+{}^5/_6={}^{20}/_6+{}^3/_6={}^{19}/_6+{}^4/_6$ и т. д.

Обратно:

1. Сложить $^1/_4+{}^3/_4$.

— — $^5/_9+{}^3/_9$.

— — $^7/_{12}+{}^3/_{12}+{}^5/_{12}$.

Какія это дроби вразсужденіи своихъ знаменателей? Какъ поступаютъ при сложеніи однородныхъ дробей? —

У. Чѣмъ $^8/_9$ болѣе $^4/_9$?

Какая разность между $^{11}/_{12}$ и $^6/_{12}$?

Отнимите отъ $^{14}/_{17}$ дробь $^{9}/_{17}$.

У. Что получится, если отъ 1 ц. отнять $^{1}/_{4}$?

Д. $^{3}/_{4}$.

У. Почему?

Д. Цѣлое имѣетъ $^{4}/_{4}$; $^{4}/_{4}$ безъ $^{1}/_{4}$ составляютъ $^{3}/_{4}$.

У. Что останется, если изъ $2^{1}/_{5}$ вычесть $^{4}/_{5}$?

Д. $^{7}/_{5}$ или $1^{2}/_{5}$.

У. Какъ это вы нашли?

Д. $2^{1}/_{5}$ все тоже, что $^{11}/_{5}$; $^{11}/_{5} - ^{4}/_{5} = ^{7}/_{5}$; $^{7}/_{5}$ все равно, что 1 ц. и $^{2}/_{5}$.

У. Какимъ же образомъ надобно поступать при вычитаніи дробей съ одинакими знаменателями?

Д. Числителя меньшей дроби должно вычесть изъ числителя бо̀льшей; чрезъ вычитаніе окажется число остающихся долей.

У. А если дробь, принадлежащая къ смѣшанному числу, будетъ менѣе вычитаемой дроби?

Д. Тогда смѣшанное число должно прежде привести въ неправильную дробь, и пото̀мъ вычитать.

Вотъ еще нѣсколько задачъ для упражненія.

1. Разложить дробь $^{8}/_{9}$ на двѣ неравныя части, и показать, чѣмъ одна изъ нихъ болѣе или менѣе другой.

Отвѣтъ: $^{8}/_{9} = ^{5}/_{9} + ^{3}/_{9}$; $^{3}/_{9} < ^{5}/_{9}$ двумя девятыми.

2. Разложите $^{6}/_{7}$ на двѣ неравныя части такъ, чтобы одна изъ нихъ была болѣе другой только *одною седьмою.*

Отв. Это невозможно.

3. Разложите $^{7}/_{10}$ на двѣ неравныя части такъ, чтобы одна часть была болѣе другой на одну десятую.

Отв. $^4/_{10} + ^3/_{10}$.

4. Разложите $^9/_8$ на такія двѣ неравныя части, что если отъ бо̀льшей изъ нихъ отнять $^1/_8$, то останутся двѣ равныя доли.

Отв. $^5/_8 + ^4/_8$.

5. Павелъ и Иванъ имѣютъ вмѣстѣ $^{11}/_{15}$ руб.; первый имѣетъ болѣе втораго *тремя пятнадцатыми рубля.* Сколько денегъ у каждаго?

Отв. у Павла $^7/_{15}$, у Ивана $^4/_{15}$.

6. А. и Б. имѣютъ вмѣстѣ $^{10}/_{11}$ фунта шелку; если А отдастъ двѣ части своего шелку Б, то оба будутъ имѣть поравно. Сколько имѣетъ каждый?

Отв. А $= ^7/_{11}$; Б $= ^3/_{11}$.

N° 41. ДЕВЯТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Измѣненіе достоинства и вида дроби чрезъ умноженіе и дѣленіе ея числителя.

Упражненіе производится по той же таблицѣ № II.

А. *Измѣненіе дроби чрезъ умноженіе ея числителя.*

У. Покажите $^2/_6$.

Д. Вотъ $^2/_6$.

У. Возьмите дробь вдвое болѣе $^2/_6$.

Д. $^4/_6$.

У. Измѣнилась-ли здѣсь величина частей?

Д. Нѣтъ; части остались тѣже, *шестыя.*

У. Что же измѣнилось?

Д. Число частей.

У. Во сколько разъ оно увеличилось?

Д. Вдвое.

У. Покажите $^3/_{10}$, и потóмъ означьте дробь, которая *вчетверо* болѣе $^3/_{10}$?

Дробь, которая *вчетверо* болѣе $^3/_{10}$ есть $^{12}/_{10}$ (указывая на таблицѣ), или 1 ц. $+ ^2/_{10}$.

У. Итакъ, при увеличеніи дроби въ нѣсколько кратъ, который изъ членовъ ея увеличивается, числитель или знаменатель?

Д. Числитель.

У. Во сколько разъ?

Д. Во столько же разъ, во сколько увеличивается дробь.

У. Поэтому, что произойдетъ съ дробью, если ея числителя увеличить въ нѣсколько разъ?

Д. Она также во столько же разъ увеличится.

У. Увеличить дробь нѣсколько разъ тоже значитъ, что умножить ее на цѣлое число. Поэтому, какъ должно поступать при умноженіи дроби на цѣлое число?

Д. Умножить ея числителя на данное цѣлое число, и подъ произведеніемъ подписать знаменателя множимой дроби.

У. Что надобно сдѣлать, если чрезъ это дѣйствіе получится неправильная дробь?

Д. Исключить изъ нея цѣлое число.

Послѣ этого ученики упражняются по слѣдующимъ рядамъ:

a) $2 \times {}^1/_2 = {}^2/_2 = 1$;
$3 \times {}^1/_2 = {}^3/_2 = 1^1/_2$;
$4 \times {}^1/_2 = {}^4/_2 = 2$;
$5 \times {}^1/_2 = {}^5/_2 = 2^1/_2$;
и проч.

b) $2 \times {}^1/_3 = {}^2/_3$;
$3 \times {}^1/_3 = {}^3/_3 = 1$;
$4 \times {}^1/_3 = {}^4/_3 = 1^1/_3$;
$5 \times {}^1/_3 = {}^5/_3 = 1^2/_3$;
и проч.

c) $2 \times {}^2/_3 = {}^4/_3 = 1{}^1/_3$;
$3 \times {}^2/_3 = {}^6/_3 = 2$;
$4 \times {}^2/_3 = {}^8/_3 = 2{}^2/_3$;
$5 \times {}^2/_3 = {}^{10}/_3 = 3{}^1/_3$;
и т. д.

d) $2 \times {}^1/_4 = {}^2/_4$;
$3 \times {}^1/_4 = {}^3/_4$;
$4 \times {}^1/_4 = {}^4/_4 = 1$;
$5 \times {}^1/_4 = {}^5/_4 = 1{}^1/_4$;
и т. д.

Обратно: *умножить какую-нибудь дробь на цѣлое число тоже значитъ, что взять отъ цѣлаго числа одну или нѣсколько его частей.* Такъ ${}^1/_3 \times 5$ все тоже, что третья часть отъ 5 цѣл.; ${}^5/_7 \times 9$ все тоже, что *пять седьмыхъ* отъ 9 цѣлыхъ.

Здѣсь представляется два случая: a) отнятіе одной части отъ какого-либо цѣлаго; b) отнятіе нѣсколькихъ частей.

a. *У.* (показывая на 9 квадратовъ втораго горизонтальнаго ряда). Сколько составляетъ половина отъ 9 цѣлыхъ?

Д. $4{}^1/_2$.

У. Почему?

Д. Потому что половина отъ одного цѣлаго есть половина; половина отъ 9 ц. составляетъ 9 половинъ или $4{}^1/_2$.

У. Сколько получится, если отъ 11 ц. взять третью часть?

Д. 3 ц. и ${}^2/_3$; потому что взять третью часть отъ 11 ц. тоже значитъ, что раздѣлить 11 ц. на 3; поэтому и выйдетъ ${}^{11}/_3$ или $3{}^2/_3$.

У. Что составитъ ${}^1/_9$ отъ 40?

Д. 4 ц. + ${}^4/_9$ ц.

Доказательство подобно предыдущимъ.

Примѣчаніе. Здѣсь кстати повторить съ учениками таблицу, помѣщенную въ № 22. I. части, на стр. 106.

b. *У.* (показывая на два квадрата третьяго ряда). Скажите, сколько составляютъ $^2/_3$ отъ 2 ц.?

Д. Двѣ трети отъ 2 ц. составляютъ $^4/_3$ или 1 ц. и $^1/_3$.

У. Почему?

Д. $^2/_3$ отъ 1 ц. $= ^2/_3$ ц.; $^2/_3$ отъ 2 ц. $= 2 \times ^2/_3$ ц. или $^4/_3$ ц.; но $^4/_3$ ц. $= 1^1/_3$.

У. Нѣкто имѣлъ 14 руб.; онъ издержалъ $^2/_3$ этой суммы. Сколько же онъ издержалъ рублей?

Д. Онъ издержалъ $9^1/_3$ руб.; потому что $^1/_3$ отъ 14 р. составляетъ $^{14}/_3$ р.; $^2/_3$ отъ 14 р. $= 2 \times ^{14}/_3$ или $^{28}/_3$ р. Каждое цѣлое имѣетъ $^3/_3$; поэтому сколько разъ 3 содержится въ 28, столько и будетъ цѣлыхъ; но 3 въ 28 содержится $9^1/_3$ раза.

Пройдя такимъ образомъ третій рядъ, учитель постепенно переходитъ сперва къ четвертому, потомъ къ пятому, и т. д.

У. Что получится если $^1/_2$ отъ 4 повторить 12 разъ?

Д. 24 цѣлыхъ.

$^1/_2$ отъ $4 = 2$; $12 \times ^1/_2$ отъ $4 = 12 \times 2 = 24$.

У. Опредѣлите смѣшанное число, которое произойдетъ отъ увеличенія $^1/_9$ числа 14 въ семь разъ.

Д. Получится число $10^8/_9$.

Девятая доля 14 ц. $= ^{14}/_9$; *семь разъ девятая* доля 14 ц. $= 7 \times ^{14}/_9$; $7 \times ^{14}/_9 = 7 \times ^{10}/_9 + 7 \times ^4/_9$; $7 \times ^{10}/_9 = ^{70}/_9$; $7 \times ^4/_9 = ^{28}/_9$; $^{70}/_9 + ^{28}/_9 = ^{98}/_9$, $^{98}/_9$ все тоже, что $^{90}/_9 + ^8/_9$; $^{90}/_9 = 10$ ц.; 10 ц. $+ ^8/_9 = 10^8/_9$

Примѣненія. Одинъ мастеръ съ своимъ подмастерьемъ условились такъ, что всякой разъ изъ выручаемой обоими

суммы денегъ, первый беретъ на свою долю $\frac{2}{3}$ ея. Они заработали: въ первый день 10 руб., во второй, 11 руб., и въ третій, 13 руб. Сколько придется получить мастеру изъ всей заработанной суммы? — 5 разъ $\frac{3}{7}$ отъ 11 ц. = какому смѣшанному числу? —

Б. *Измѣненіе дроби чрезъ раздѣленіе ея числителя.*

Дробь уменьшается въ два или нѣсколько разъ, если при томъ же знаменованіи частей, число этихъ частей уменьшится въ два или нѣсколько разъ. Другими словами: *дробь уменьшится въ 2, 3 и болѣе разъ, если числитель ея раздѣлится на 2, 3 и т. д.*

Учениковъ наводятъ на это замѣчаніе также посредствомъ упражненія по таблицѣ. Мы не обозначаемъ здѣсь хода занятій, потому что онъ легко можетъ быть выведенъ по аналогіи изъ предыдущаго. Замѣтимъ только, что при этомъ случаѣ надобно выбирать такія дроби, которыхъ числители содержатъ въ себѣ безъ остатка данныхъ дѣлителей.

Примѣръ. Раздѣливъ числителя дроби $^9/_{12}$ на 3, получимъ дробь $^3/_9$; сравнивъ эту послѣднюю дробь съ $^9/_{12}$, находимъ, что она менѣе ея въ *три* раза.

Итакъ вообще: *достоинство дроби измѣнится, если умножить или раздѣлить числителя ея на какое-либо число. Въ первомъ случаѣ она увеличится, и увеличится во столько разъ, сколько единицъ находится во множителѣ; во второмъ, уменьшится, и уменьшится во столько разъ, сколько единицъ въ дѣлителѣ. Во всякомъ случаѣ знаменатель остается прежній.*

N° 42. ДЕСЯТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Измѣненіе достоинства и вида дроби чрезъ умноженіе и дѣленіе ея знаменателя.

Сравнивая по таблицѣ дроби: $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{10}$ и т. д., учитель легко доведетъ учениковъ до сознанія, что чрезъ увеличеніе знаменателя дроби въ нѣсколько разъ, достоинство самой дроби во столько же разъ уменьшится.

Сюда относятся ряды:

a) $\frac{1}{2}$ вдвое> $\frac{1}{4}$;
$\frac{1}{3}$ вдвое> $\frac{1}{6}$;
$\frac{1}{4}$ вдвое> $\frac{1}{8}$;
$\frac{1}{5}$ вдвое> $\frac{1}{10}$, и т. д.

b) $\frac{1}{2}$ втрое> $\frac{1}{6}$;
$\frac{1}{3}$ втрое> $\frac{1}{9}$;
$\frac{1}{4}$ втрое> $\frac{1}{12}$, и т. д.

c) $\frac{1}{2}$ вчетверо> $\frac{1}{8}$;
$\frac{1}{3}$ вчетверо> $\frac{1}{12}$, и т. д.

Во сколько разъ надобно уменьшить знаменателя $\frac{1}{10}$, чтобы получить дробь $\frac{1}{2}$? —

Учитель при этомъ случаѣ долженъ стараться, чтобы ученики хорошо усвоили себѣ понятіе о тожественности слѣдующихъ выраженій:

1) *уменьшить дробь въ 2 или нѣсколько разъ*; 2) *увеличить ея знаменателя въ два или нѣсколько разъ*, и 3) *раздѣлить ея числителя на 2, 3, 4 и проч.*

Съ предыдущими рядами сравниваются слѣдующіе:

$^1/_2 : 2 = ^1/_4$;	$^1/_3 : 2 = ^1/_6$;	$^1/_4 : 2 = ^1/_8$;
$^1/_2 : 3 = ^1/_6$;	$^1/_3 : 3 = ^1/_9$;	$^1/_4 : 3 = ^1/_{12}$;
$^1/_2 : 4 = ^1/_8$;	$^1/_3 : 4 = ^1/_{12}$;	$^1/_4 : 4 = ^1/_{16}$;
и т. д.	и т. д.	и т. д.

Ряды a, b, c и проч. ведутъ также къ обратному заключенію, т. е., что *чрезъ уменьшеніе знаменателя дроби въ нѣсколько разъ, или чрезъ дѣленіе ея на 2, 3, 4 и проч., самая дробь во столько же разъ увеличивается.*

Примѣръ. Чрезъ раздѣленіе знаменателя дроби $^2/_9$ на 3, получится дробь $^2/_3$, которая втрое болѣе $^2/_9$. Дѣйствительно, сравнивая *третьи* части съ *девятыми*, найдемъ, что первыя втрое крупнѣе или болѣе вторыхъ, число же частей въ обоихъ случаяхъ одинаково; поэтому $^2/_9$ втрое $<^2/_3$.

Примѣч. Учитель не долженъ довольствоваться двумя или тремя примѣрами, если желаетъ, чтобы ученики сами находили правило на всякій отдѣльный пріемъ исчисленія и всегда дѣйствовали по совершенному убѣжденію.

Уменьшить дробь въ нѣсколько разъ значитъ тоже, что взять отъ нея какую-либо часть. Такъ раздѣлить $^1/_2$ на 2 все тоже, что отъ $^1/_2$ взять *половину*, или получить $^1/_4$. $^3/_4 : 5 = ^1/_5$ отъ $^3/_4 = ^3/_{20}$

Здѣсь также, какъ и въ № 41, два случая подлежатъ рѣшенію: a) отыскать $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ и пр. отъ всякой основной или простой дроби, и b) опредѣлить $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ и проч. отъ всякой сложной дроби.

a. *У.* (показывая на двѣ части перваго квадрата четвертаго горизонтальнаго ряда). Сколько это составляетъ отъ цѣлаго?

Д. Половину, потому что тутъ $^2/_4$, а въ цѣломъ такихъ частей 4.

У. Что же составляетъ половину отъ этой половины?

Д. Одна *четверть* цѣлаго.

У. Почему?

Д. Потому, чтобъ получить половину цѣлаго, надобно взять *двѣ четверти*; слѣд., одна четверть вдвое менѣе половины, или *половина* отъ нея.

У. Найдите половину отъ $^1/_3$.

Д. Половина отъ $^1/_3$ есть $^1/_6$; потому что въ составъ каждой трети цѣлаго входятъ двѣ шестыя того же цѣлаго.

У. Сколько составляетъ $^1/_3$ отъ $^1/_3$?

Д. $^1/_9$, ибо $3 \times {}^1/_9 = {}^1/_3$.

Такимъ образомъ здѣсь можно изустно и письменно занимать учениковъ рядами:

1) $^1/_2$ отъ $^1/_2 = {}^1/_4$;
$^1/_2$ отъ $^1/_3 = {}^1/_6$;
$^1/_2$ отъ $^1/_4 = {}^1/_8$;
$^1/_2$ отъ $^1/_5 = {}^1/_{10}$;
и т. д.

2) $^1/_3$ отъ $^1/_2 = {}^1/_6$;
$^1/_3$ отъ $^1/_3 = {}^1/_9$;
$^1/_3$ отъ $^1/_4 = {}^1/_{12}$;
$^1/_3$ отъ $^1/_5 = {}^1/_{15}$;
и т. д.

ь. *У.* Если $^1/_2$ отъ $^1/_2$ составляетъ $^1/_4$, то сколько составитъ $^1/_2$ отъ $^3/_2$?

Д. $^3/_4$.

У. Почему?

Д. $^1/_2$ отъ $^1/_2 = {}^1/_4$; $^1/_2$ отъ $^2/_2 = {}^2/_4$; $^1/_2$ отъ $^3/_2 = {}^3/_4$.

У. Найдите половину отъ $^3/_5$.

Д. $^3/_{10}$; потому что если $^1/_2$ отъ $^1/_5 = {}^1/_{10}$, то $^1/_2$ отъ $^3/_5 = {}^1/_{10}$, повторенной 3 раза, или $^3/_{10}$.

Что составляетъ $\frac{1}{3}$ отъ $\frac{2}{7}$?—Какую получимъ дробь, если въ дроби $\frac{3}{5}$ увеличимъ знаменателя въ 4 раза?

Задачи.

$^1/_3$ отъ $^4/_5 = ?$
$^1/_7$ » $^8/_9 = ?$
$^1/_4$ » $^5/_6 = ?$

Научась находить какую угодно часть отъ всякой сложной дроби, для насъ легко теперь опредѣлить $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ и проч. и отъ всякой неправильной дроби или смѣшаннаго числа.

У. Что составляетъ половина отъ $^{11}/_3$?

Д. $^{11}/_6$.

У. Почему?

Д. $^1/_2$ отъ $^1/_3 = {}^1/_6$; $^1/_2$ отъ $^{11}/_3 = 11 \times {}^1/_6$ или $^{11}/_6$.

У. Сравнивая дроби $^{11}/_3$ и $^{11}/_6$ между собою, какое различіе въ нихъ замѣчаемъ?

Д. При одинакихъ числителяхъ, знаменатель второй дроби вдвое болѣе знаменателя первой.

У. Что означаетъ дробь $^{11}/_6$ вразсужденіи дроби $^{11}/_3$?

Д. Одну половину послѣдней.

У. Итакъ, чтобы опредѣлить половину дроби, какой членъ ея должно измѣнить?

Д. Знаменателя: его должно увеличить вдвое.

У. А чтобъ найти $^1/_3$ отъ этой дроби?

Д. Надобно ея знаменателя увеличить втрое.

У. А числителя?

Д. Числитель останется тотъ же.

У. Какое же можно вывести отсюда заключеніе?

Д. *Чтобы взять $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ и проч. отъ какой-либо дроби, надобно знаменателя этой дроби умножить на 2, 3, 4 и проч.*

У. А если дробь неправильная?

Д. Тоже самое.

У. А еслибъ требовалось отъ какого-либо смѣшаннаго числа взять какую-либо часть?

Д. Кажется, прежде надобно бы было обратить смѣшанное число въ неправильную дробь.

У. Точно такъ! Отыщите $^1/_3$ отъ $2^1/_2$

Д. $2^1/_2={}^5/_2$; $^1/_3$ отъ $^1/_2={}^1/_6$; $^1/_3$ отъ $^5/_2=5\times{}^1/_6$ или $^5/_6$.

Примѣры. Если отъ своихъ денегъ возьмешь $\frac{1}{5}$ и къ ней приложишь еще 7 рублей, то узнаешь, сколько у меня денегъ, сказалъ Александръ Петру. Сколько же денегъ у Александра, когда Петръ имѣетъ $4\frac{2}{5}$ р?

$^1/_2$ отъ $2^2/_3=?$
$^1/_7$ » $3^4/_5=?$
$^1/_8$ » $4^1/_6=?$

N° 43. ОДИННАДЦАТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Содержимость дробныхъ чиселъ или дѣленіе дроби на дробь.

(Обратное дѣйствіе предыдущаго N°).

У. (показывая сперва на одну долю перваго квадрата втораго горизонтальнаго ряда, а потомъ на три такія доли). Здѣсь сколько половинъ цѣлаго?

Д. Одна половина цѣлаго.

У. А здѣсь сколько?

Д. Три половины.

У. Одна половина цѣлаго какую часть составляетъ отъ трехъ половинъ его?

Д. Третью часть.

У. Почему?

Д. Потому что *три половины* втрое болѣе *одной* половины.

У. А какую часть *половина* составляетъ отъ 7 половинъ?

Д. Седьмую часть; потому что 7 половинъ въ *семь* разъ болѣе *одной* половины.

У. (обращаясь къ третьему ряду). Какую часть *треть* составляетъ отъ *двухъ третей.*

Д. Половину; потому что $^2/_3$ вдвое болѣе $^1/_3$.

У. Покажите 17 третей.

Д. Вотъ *семнадцать* третей.

У Какую часть одна треть составляетъ отъ 17 третей?

Д. *Семнадцатую часть*, потому что въ 17 третяхъ *одна треть* содержится 17 разъ.

У. Покажите двѣ половины. Гдѣ 6 половинъ? Какую же часть 2 половины составляютъ отъ 6 половинъ?

Д. *Третью часть*; потому что 6 половинъ въ три раза болѣе двухъ половинъ.

У. Сколько разъ 9 половинъ содержитъ въ себѣ 3 половины.

Д. Три раза.

У. Итакъ, $^3/_2$ отъ $^9/_2$ какую часть составляютъ?

Д. Третью часть.

У. Покажите 4 ц. и еще $^1/_2$ ц.

Дѣти исполняютъ требуемое.

У. Сколько разъ отъ этого числа можно отнимать по $^3/_2$?

Д. Три раза.

У. Почему?

Д. 4 ц. + $^1/_2$ ц. = $^9/_2$ ц.; $^9/_2$ ц. все равно, что $3\times{}^3/_2$ ц.

У. Гдѣ одна треть отъ $^3/_2$?

Д. (указывая на нее). Вотъ треть отъ $^3/_2$.

У. Сколько же составитъ всего 3 раза $^3/_2$ и 2 раза третья часть отъ $^3/_2$?

Д. $5^1/_2$.

У. Почему?

Д. $3\times{}^3/_2={}^9/_2$ или $4^1/_2$ ц.; $^1/_3$ отъ $^3/_2={}^1/_2$. $2\times{}^1/_3$ отъ $^3/_2$ составляетъ *двѣ половины*, или *одно* цѣлое, $4^1/_2+1=5^1/_2$.

Мало-по-малу отъ втораго горизонтальнаго ряда учитель переходитъ къ третьему.

Изъ всего видно, что здѣсь не нужно торопиться, чтобы дѣйствовать съ успѣхомъ.

У. $^7/_3$ сколько разъ содержатся въ 9 ц. и двухъ разъ $^1/_3$ цѣлаго?

Д. $4^1/_7$. *Доказательство.* 9 ц. $={}^{27}/_3$; 2 раза $^1/_3={}^2/_3$; $^{27}/_3+{}^2/_3={}^{29}/_3$; $^7/_3$ въ $^{29}/_3$ содержится 4 раза съ остаткомъ *одной седьмой.*

Примѣненія. Одна мать осьмерымъ своимъ дѣтямъ раздѣлила поровну неизвѣстное число яблоковъ; каждое дитя получило по $\frac{3}{4}$ яблока. Сколько было яблоковъ?—Одинъ работникъ въ первый разъ заработалъ 5 руб. съ *полтиною*, во второй, *семь полтинъ.* На сколько дней станетъ ему заработанная имъ сумма, если онъ ежедневно будетъ тратить по *полтора* рубля?—$\frac{3}{5}$ ц. содержится въ неизвѣстномъ числѣ 7 разъ и *одную пятую* раза отъ $\frac{3}{5}$. Какъ велико неизвѣстное число?—Портной на вопросъ: сколько въ купленномъ имъ кускѣ сукна содержится аршинъ? отвѣчалъ: изъ этого сукна выйдетъ 8 такихъ паръ платья, на каждую изъ которыхъ надобно употребить по $^{17}/_4$ арш. Сколько же въ кускѣ всего аршинъ?

У. (указывая на 4 ц. квадрата и $^1/_2$ пятаго). Отъ какого числа $4^1/_2$ составляютъ половину?

Д. Отъ 9 цѣлыхъ; ибо если $4^1/_2$ составляютъ половину отъ искомаго числа, то оно должно быть вдвое болѣе $4^1/_2$ ц.; но $4^1/_2$ ц. все тоже, что $^9/_2$; $2 \times {}^9/_2 = {}^{18}/_2 = 9$ ц.

У. Означьте по таблицѣ 5 ц. + $^2/_5$ ц.

Д. Вотъ 5 ц. + $^2/_5$ ц.

У. Отъ какого числа означенное вами число есть третья часть?

Д. Отъ $16^1/_5$ ц.

У. Какъ это вы нашли?

Д. 5 ц + $^1/_5$ есть *третья* часть искомаго числа; значитъ, что послѣднее должно быть *втрое* болѣе 5 ц. + $^1/_5$ ц. Три раза 5 ц. = 15 ц.; $3 \times {}^2/_5 = {}^6/_5$; $^6/_5 = 1$ ц. + $^1/_5$ ц; 15 ц. + $1^1/_5 = 16^1/_5$ ц.

Примѣненія. Я задумалъ число, отъ котораго $4\frac{1}{5}$ составляютъ *осьмую* часть. Какое число я задумалъ?—Начертить на доскѣ линію, которая имѣла бы $4\frac{1}{2}$ вершка длины, и по этой линіи составить другую, которая была бы болѣе первой въ 3 раза.— „Сколько у тебя денегъ?“ спрашиваетъ Александръ у Петра. „У меня $6\frac{7}{9}$ руб.“ отвѣчалъ Петръ. „А у тебя сколько?“ спрашиваетъ Петръ.— „Если ты къ своимъ деньгамъ прибавишь еще рубль, то твои деньги отъ моихъ составятъ равно *четвертую часть*, говоритъ Александръ. Сколько было денегъ у Александра? —

До-сихъ-поръ по одной какой-либо части опредѣляли цѣлое число, теперь предположимъ себѣ разрѣшить такой вопросъ: *какимъ образомъ опредѣлить цѣлое число по двумъ или нѣсколькимъ равнымъ частямъ его?*

У. Покажите на таблицѣ 4 половины

Ученики исполняютъ требуемое.

У. Отъ какого числа $^4/_2$ составляютъ $^2/_3$?

Д. Отъ $^6/_2$ или 3 ц.

У. Почему?

Д. Если $^4/_2$ составляютъ $^2/_3$ искомаго числа, то $^1/_3$ того же числа должна быть вдвое менѣе $^4/_2$; $^1/_2$ отъ $^4/_2$ есть $^2/_2$. Когда $^2/_2$ составляютъ *третью* часть искомаго числа, то все число должно быть $3 \times {}^2/_2 = {}^6/_2$ или 3 ц.

У. Отъ какого числа 5 цѣлыхъ составляютъ $^4/_9$ части?

Д. Отъ $11^1/_4$.

У. Почему?

Д. 5 ц. $= {}^{20}/_4$; $20 = 4 \times {}^5/_4$. Если $4 \times {}^5/_4$ составляютъ $^4/_9$ искомаго числа, то одна часть его будетъ $= {}^5/_4$; потому все число, или *девять девятыхъ* $= 9 \times {}^5/_4 = {}^{45}/_4$ или $^{44}/_4 + {}^1/_4 = 11^1/_4$.

Еще примѣръ. 7 ц. отъ какого числа составляютъ $^5/_8$?

Отв. Отъ $11^1/_5$.

Рѣшеніе. Если 7 ц. составляютъ $^5/_8$ искомаго счила, то $^1/_8$ того же числа должна быть въ 5 разъ менѣе 7, или $^7/_5$, а $^8/_8$ или цѣлое въ 8 разъ болѣе $^7/_5$, или $^{56}/_5$, или $11^1/_5$.

№ 44. ДВѢНАДЦАТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Приложеніе къ предыдущимъ исчисленіямъ мѣръ вѣса, денегъ, длины и проч.

Этотъ нумеръ, какъ приложеніе къ предыдущимъ нумерамъ, гдѣ занятія производились по та-

блицѣ, ближе познакомить дѣтей съ значенiемъ дробныхъ величинъ.

А *Раздробленiе и превращенiе дробныхъ чиселъ.*

У. Помните-ли таблицу мѣръ вѣса, длины и проч.

Д. Мы ее твердо помнимъ.

У. Хорошо; скажите же мнѣ всѣ мѣры торговаго вѣса!

Д. Берковецъ — пудъ — фунтъ — лотъ — золотникъ — доля.

У. Какъ эти мѣры относятся одна къ другой?

Д. Берковецъ въ 10 разъ болѣе пуда; пудъ въ 40 разъ болѣе фунта, и т. д.

У. Если цѣлый берковецъ имѣетъ 10 пудъ, то сколько пудовъ въ *половинѣ* берковца?

Д. 5 пудъ.

У. Почему?

Д. Если въ цѣломъ берковцѣ 10 пудъ, то въ половинѣ его должно быть *вдвое* менѣе; уменьшивъ 10 въ 2 раза, получимъ 5.

У. Сколько пудъ въ $^4/_5$ берковца?

Д. 8 пудъ, потому что на $^1/_5$ берковца приходится два пуда, а на $^4/_5$ берк. — 4×2 или 8 пудъ.

У. Узнайте, сколько въ $^3/_8$ пуда содержится фунтовъ?

Д. 15 ф.; потому что $^1/_8$ п. $=$ 5 ф.; $5 \times {}^3/_8$ $= 5 \times 3 = 15$.

У. Сколько въ каждомъ золотникѣ долей?

Д. 96.

У. Найдите много-ли долей въ $^{11}/_{12}$ золот.

Д. 88; потому что $^1/_{12}$ отъ 96 = 8; $^{11}/_{12}$ зол = 11 × 8 дол.

Другое рѣшеніе. Золотникъ въ 96 разъ болѣе доли; поэтому, чтобы вмѣсто $^{11}/_{12}$ зол. получить доли, надобно $^{11}/_{12}$ увеличить въ 96 разъ. $^{11}/_{12} \times 96 = {}^{1056}/_{12} = 88$.

Тоже и со всѣми прочими мѣрами.

Примѣненія. Крестьянинъ продалъ на рынкѣ $\frac{5}{8}$ берковца пеньки, и за каждый пудъ получилъ по 1 руб. 85 к. Сколько всего денегъ получилъ онъ за проданную пеньку? — Что будетъ стóить $\frac{5}{16}$ ф. чаю, котораго каждый золотн. продается по 11 копѣекъ? — Въ $\frac{3}{4}$ часа сколько минутъ? — На одно учебное заведеніе отпущено: въ первый разъ $\frac{3}{4}$ стопы бумаги, во второй $\frac{1}{2}$ ст., и въ третій, $\frac{4}{5}$ стопы. Много-ли всего отпущено дестей въ *три* раза? — Александръ изъ подареннаго ему серебрянаго рубля (3 р. 50 к.) издержалъ въ понедѣльникъ $\frac{1}{7}$, во вторникъ $\frac{1}{5}$, и въ среду $\frac{1}{35}$. Сколько копѣекъ у него осталось? — Иванъ проходитъ въ *четверть* часа по $\frac{3}{4}$ версты, а Петръ по $\frac{4}{5}$ версты. Сколькими саженями одинъ проходитъ болѣе другаго въ цѣлый часъ, полагая что они идутъ во все время одинаково? —

Какъ дробь бóльшаго наименованія можно приводить въ цѣлыя числа мѐньшаго, того же рода, такъ и обратно, на каждое число мѐньшей мѣры можно взирать, какъ на часть или части бóльшей, съ ней однородной (*См. No.* 34).

Такъ:

a) 1 футъ = $^1/_7$ сажени;
 2 фута = $^2/_7$ „
 3 „ = $^3/_7$ „
 и т. д.
 1 дюймъ = $^1/_{12}$ фута;

2 дюйма $= {}^{2}/_{12}$ „
3 „ $= {}^{3}/_{12}$ „
и т. д.

b) 1 день $= {}^{1}/_{365}$ года $= {}^{1}/_{30}$ мѣс. $= {}^{1}/_{7}$ недѣл;
2 дня $= {}^{2}/_{365}$ „ $= {}^{2}/_{30}$ „ $= {}^{2}/_{7}$ „
и проч. и проч.

Вотъ удобный случай произвести съ учениками цѣлый рядъ письменныхъ упражненій.

В. *Раздробленіе и превращеніе смѣшанныхъ чиселъ.*

У. Сколько въ $5^{3}/_{4}$ часа содержится минутъ?

Д. 345 минутъ; потому что 5 ч. $= 5 \times 60$ м. или 300 мин.; ${}^{1}/_{4}$ ч. $= 15$ м.; ${}^{3}/_{4}$ ч. $= 3 \times 15$ м. $=$ 45 м.; 300 м. $+$ 45 м. $=$ 345 м.

Въ 9 ${}^{5}/_{7}$ фута сколько дюймовъ?

Превое рѣшеніе. $9^{5}/_{7}$ ф. $= {}^{68}/_{7}$ ф.; 1 ф. $= 12$ дюйм.; ${}^{1}/_{7}$ ф. $= {}^{12}/_{7}$ д.; ${}^{68}/_{7} = {}^{68 \times 12}/_{7}$ дюйм. $= {}^{68 \cdot 10}/_{7} + {}^{68 \times 2}/_{7} = {}^{680}/_{7} + {}^{136}/_{7} = {}^{816}/_{7} = 116^{4}/_{7}$ дюйма.

Второе рѣшеніе. $9^{5}/_{7} = 9$ ф. $+ {}^{5}/_{7}$ ф.; 9 ф. $=$ 9×12 д. $= 108$ дюймамъ; ${}^{5}/_{7}$ ф. $= {}^{5 \times 12}/_{7}$ д. $= {}^{60}/_{7}$ д.; ${}^{60}/_{7}$ д. $= 8^{4}/_{7}$ д., 108 д. $+ 8^{4}/_{7}$ д. $= 116^{4}/_{7}$ д.

Какимъ двоякимъ образомъ смѣшанное число бо̀льшаго наименованія можно привести въ мѐньшее того же рода? — Который способъ проще? — Почему? — Итакъ, какого вообще правила надо держаться при приведеніи смѣшаннаго числа бо̀льшаго наименованія въ мѐньшую мѣру того же рода?

У. Какую часть ${}^{1}/_{2}$ пуда составляетъ отъ берковца?

Д. ${}^{1}/_{20}$

У. Почему?

Д. Если цѣлый пудъ составляетъ $^1/_{10}$ берк., то $^1/_2$ пуда должна составлять часть вдвое меньшую, т. е. $^1/_{20}$.

У. Какую часть $^3/_4$ фунта составляютъ отъ пуда?

Д. $^3/_{160}$; потому что 1 ф. = $^1/_{40}$ пуда; потому $^1/_4$ ф. должна составлять часть вчетверо менѣе $^1/_{40}$, или $^1/_{160}$, а $^3/_4$ ф. — $^3/_{160}$ пуда.

№ 45. ТРИНАДЦАТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Повтореніе всего пройденнаго.

Читатель легко замѣтитъ, что всѣ, до-сихъ-поръ произведенныя нами, дѣйствія касались только *однородныхъ* (соименныхъ) дробей: ни приведеніе дробей къ одинакому знаменателю, ни сокращеніе ихъ не имѣло тутъ мѣста. Прежде нежели пойдемъ далѣе, постараемся сдѣлать общій сводъ пройденному, придерживаясь по возможности систематическаго порядка, который самъ-собою представляется при изученіи дробей.

1. *О дробяхъ вообще и ихъ составныхъ частяхъ.*

Что такое дробь? — Какъ называется часть единицы, раздѣленной на 8, 11, 5, 13 равныхъ частей? — Что получится, если *единицу* раздѣлить на 3, 10, 12, 17 равныхъ частей? — Что надобно сдѣлать съ цѣлымъ, чтобы получить слѣдующія дроби $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{15}$? — Какъ находятъ дроби $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{2}{3}$? — Въ дроби $\frac{5}{8}$ сколько и какихъ частей не достаетъ до цѣлаго? — 1 фунтъ какую

часть составляетъ отъ 1 пуда, и почему? — 4 фута сколько и какихъ частей составляютъ отъ 1 сажени? — Что такое числитель? — Какому числу въ дѣленіи соотвѣтствуетъ числитель? — Что разумѣютъ подъ именемъ знаменателя? — Какое общее названіе имѣютъ оба числа, составляющія собою дробь? — Знаменатель дроби соотвѣтствуетъ какому вопросу? — А числитель? — Наименуйте нѣсколько дробей, которыя имѣютъ одинакихъ знаменателей, а разныхъ числителей. — Отъ чего всякая дробь получаетъ свое имя, отъ числителя или знаменателя?

2. *Двоякое происхожденіе дроби.*

Какимъ двоякимъ образомъ можно взирать на происхожденіе всякой дроби? — Правильная дробь есть выраженіе какого частнаго? — А неправильная? — Чему равны всѣ такія дроби, у которыхъ числители одинаковы съ ихъ знаменателями?

3. *Взаимное сравненіе дробей.*

Изъ двухъ дробей, имѣющихъ одинакихъ знаменателей, которая болѣе? — Что дѣлается съ дробью по мѣрѣ того, какъ знаменатель ея увеличивается, а числитель остается прежній? — Напротивъ, что будетъ съ дробью, если при томъ же знаменателѣ числитель ея увеличится? —

4 *Различные роды дробей.*

Что разумѣютъ подъ именемъ *основной* или *простой* дроби? — Что такое *сложная* дробь? — Приведите примѣры той и другой — Объясните, какимъ образомъ сложная дробь составляется изъ простой? — Наименуйте нѣсколько такихъ дробей, у которыхъ числители равны своимъ знаме-

нателямъ.— Что такое *собственная* или *правильная* дробь? — Что такое *неправильная* дробь? — Что называется *смѣшаннымъ* числомъ? — Какъ дѣлятся дроби вразсужденіи того, імѣютъ ли онѣ одинакихъ или разныхъ знаменателей?—

5. *Обращеніе цѣлыхъ и смѣшанныхъ чиселъ въ неправильныя дроби, и обратно.*

Обратите 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. въ половины, трети, четверти и т д. — Какъ поступаютъ при обращеніи цѣлаго числа въ неправильную дробь? — Какія изъ неправильныхъ дробей равны 1, 2, 3, 4, 5 и т. д.? — Обратите $2\frac{1}{3}$, $5\frac{1}{7}$, $4\frac{3}{5}$, $3\frac{3}{4}$ въ неправильныя дроби. — Какъ цѣлое число исключается изъ неправильной дроби, или неправильная дробь приводится въ смѣшанное число? Слѣдующія неправильныя дроби: $\frac{10}{3}$, $\frac{15}{7}$, $\frac{109}{13}$, $\frac{18}{5}$ обратить въ смѣшанныя числа. — Какое изъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій употребляемъ при приведеніи цѣлаго или смѣшаннаго числа въ неправильную дробь?—А при исключеніи цѣлаго числа изъ неправильной дроби? —

6. *Разложеніе дробей.*

Разложить дробь $\frac{7}{12}$ на ея основныя дроби. — Разложить дробь $\frac{9}{10}$ на три равныя дроби. — Разложить ту же дробь на три неравныя части.— Разложить дробь $\frac{10}{13}$ на такія четыре неравныя части, чтобы вторая была *вдвое*, третья *втрое*, а четвертая *вчетверо* болѣе первой части.

7. *Сложеніе однородныхъ дробей.*

Найти сумму дробей: $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8}$. — Чему = сумма дробей: $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{12}$? — Сколько составитъ 5 ц. + $\frac{3}{4}$ ц.? — Къ $7\frac{4}{9}$ прибавьте $\frac{7}{9}$. — Отыщите сумму ряда такихъ дробей, которыхъ чис-

Какъ называется въ Ариѳметикѣ выраженіе: $5\frac{4}{7}$?— Можно ли это выраженіе представить въ видѣ дроби?—Какая получится дробь?—Сколько разъ надобно повторить основную дробь ($\frac{1}{7}$), чтобы получить ту неправильную?—На какія неравныя дроби можетъ быть разложено предложенное смѣшанное число? На какія 7 правильныхъ дробей его можно разложить?—Что получится въ остаткѣ, если отъ $5\frac{4}{7}$ отнять $\frac{6}{7}$ единицы?—Обративъ $5\frac{4}{7}$ въ неправильную дробь, увеличьте послѣднюю въ 2, 3, 4 раза, и изъ полученныхъ произведеній исключите цѣлыя числа—Узнайте, отъ какихъ чиселъ предложенное смѣшанное число составляетъ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ доли.—Сколько къ $5\frac{4}{7}$ надобно добавить, чтабы получить $6\frac{3}{7}$?—Я задумалъ число, въ которомъ предложенное смѣшанное число ($5\frac{4}{7}$) содержится равно 3 раза.

№ 46. ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Измѣненіе вида дроби, но не величины ея.

Чрезъ увеличеніе или уменьшеніе въ одинакое число разъ, какъ числителя такъ и знаменателя дроби, измѣняется только видъ ея, а не величина. Увеличивъ, напримѣръ, числителя и знаменателя дроби $^3/_4$ въ 5 разъ, получимъ дробь $\frac{3 \times 5}{4 \times 5} = {}^{15}/_{20}$, которая есть только видоизмѣненіе дроби $^3/_4$. Въ самомъ дѣлѣ, хотя числитель дроби $^{15}/_{20}$ впятеро болѣе числителя дроби $^3/_4$, однакожъ за то и знаменатель первой тоже впятеро болѣе знаменателя послѣдней, а чрезъ то и показывается, что части стали впятеро мельче прежнихъ частей. Тоже и

обратно. Очевидно, что здѣсь два случая имѣютъ мѣсто: *α, дробь, выраженную въ малыхъ числахъ, можно представить въ бóльшихъ,* и *β) обратно, вмѣсто дроби, выраженной въ большихъ числахъ, можно получить ей равнозначащую, представленную въ мéньшихъ.*

Такія разсужденія, понятныя для взрослаго, недостаточны для дѣтей. Наблюденія многихъ лѣтъ положительно доказали, что видоизмѣненіе дробей въ особенности затрудняетъ учениковъ, хотя отъ успѣха въ этомъ дѣлѣ зависитъ весь дальнѣйшій успѣхъ въ исчисленіи дробей. Поэтому-то совѣтуемъ учителю сколько возможно болѣе воспользоваться послѣднею изъ предлагаемыхъ нами таблицъ, по которой весьма удобно производить самыя разнообразныя исчисленія въ дробяхъ.

Таблица № III состоитъ также, какъ и вторая, изъ ста квадратовъ, образующихъ собою десять горизонтальныхъ и столько же вертикальныхъ рядовъ. Она отличается отъ второй таблицы тѣмъ, что въ ней кромѣ вертикальныхъ чертъ, дѣлящихъ квадраты на равныя части, проведены еще поперечныя черты. Такимъ образомъ второй квадратъ втораго горизонтальнаго ряда, кромѣ вертикальной черты, раздѣляющей его на двѣ равныя части, имѣетъ еще поперечную, также проведенную по срединѣ его, — чрезъ что цѣлый квадратъ представляется раздѣленнымъ на четыре равныя части, одна вертикальная и двѣ поперечныя черты третьяго квадрата того же ряда дѣлятъ этотъ квадратъ на 6 равныхъ частей, и т. д.

α. Измѣненіе вида дроби чрезъ умноженія обоихъ ея членовъ на одно и тоже число.

У. (указывая на второй квадратъ втораго горизонтальнаго ряда). На сколько равныхъ частей раздѣленъ этотъ квадратъ?

Д. На четыре равныя части.

У Сколько на половину приходится четвертей?

Д. Двѣ четверти.

У. (указавая на третій квадратъ того же ряда). На сколько равныхъ частей раздѣленъ этотъ квадратъ?

Д. На 6 равныхъ частей.

У. Сколько на каждую половину считается шестыхъ?

Д. *Три шестыхъ.*

По прохожденіи цѣлаго ряда, учитель заставляетъ того или другаго изъ учениковъ повторить весь рядъ по-порядку.

Ученикъ говоритъ: на *одну половину* приходится *двѣ четверти, три шестыхъ, четыре осьмыхъ, пять десятыхъ* и т. д.

Обратно: $^{10}/_{20} = ^{1}/_{2}$;
$^{9}/_{18} = ^{1}/_{2}$;
$^{8}/_{16} = ^{1}/_{2}$; и проч.

Также $^{1}/_{2} = ^{2}/_{4} = ^{3}/_{6} = ^{4}/_{8}$ и т. д. до $^{10}/_{20}$.

Обратно $^{10}/_{20} = ^{9}/_{18} = ^{8}/_{16} = ^{7}/_{14}$ и т. д. до $^{1}/_{2}$.

Послѣ этого переходитъ къ третьему ряду.

У. (указывая на второй квадратъ третьяго горизонтальнаго ряда). На сколько частей раздѣленъ этотъ квадратъ?

Д. На 6 равныхъ частей?

У. Отдѣлите отъ него *третью* часть.

Д. Вотъ его *третья* часть.

У. Сколько въ трети *шестыхъ* долей?

Д. *Двѣ шестыхъ.*

У. (указывая на третій квадратъ того же ряда). Сколько на *треть* квадрата причитается *девятыхъ*?

Д. *Три девятыхъ.*

Наконецъ ученикъ говоритъ: $^1/_3={}^2/_6={}^3/_9={}^4/_{12}={}^5/_{15}={}^6/_{18}={}^7/_{21}={}^8/_{24}={}^9/_{27}={}^{10}/_{30}$.

По прохожденіи всѣхъ рядовъ, учитель спрашиваетъ вразбивку.

У. (указывая на $^1/_6$ третьяго квадрата шестаго горизонтальнаго ряда). Какая это часть отъ всего квадрата?

Д. *Шестая.*

У. На сколько мелкихъ долей раздѣленъ весь этотъ квадратъ?

Д. На 18 равныхъ частей.

У. Сколько же причитается *осмнадцатыхъ* частей на *шестую* часть цѣлаго?

Д. *Три осмнадцатыхъ.*

У. Во сколько разъ каждая шестая часть крупнѣе *осмнадцатой*?

Д. Въ три раза.

У. Поэтому, сколько надобно взять осмнадцатыхъ, чтобы вышла $^1/_6$?

Д. Втрое болѣе, т. е. $^3/_{18}$.

У. (указывая на $^1/_9$ пятаго квадрата девятаго горизонтальнаго ряда). Какая эта часть цѣлаго?

Д. *Девятая.*

У. На сколько меньшихъ частей все цѣлое раздѣлено?

Д. На 45 равныхъ частей.

У. Сколько же въ $^1/_9$ считается *сорокъ-пятыхъ*?

Д. $^5/_{45}$

У. Почему?

Д. *Сорокъ-пятыя* части въ пять разъ мельче *девятыхъ*; слѣдственно, чтобы $^1/_9$ превратить въ *сорокъ-пятыя* доли, вмѣсто *одной* части надобно взять *пять*.

У. Мы знаемъ, что $^1/_9$ все равно, что $^5/_{45}$; но сравнивая взаимно числителей и знаменателей этихъ дробей, что̀ находимъ?

Д. Числитель второй дроби въ пять разъ болѣе числителя первой; тоже отношеніе и между знаменателями.

У. Поэтому, что надобно сдѣлать съ дробью $^1/_9$, чтобы привести ея въ *сорокъ-пятыя* доли?

Д. Такъ какъ 9 въ 45 содержится равно пять разъ, то, чтобы $^1/_9$ привести въ *сорокъ-пятыя* доли, должно числителя и знаменателя ея умножить на 5. Письменно такъ: $\frac{1 \times 5}{9 \times 5} = {}^5/_{45}$.

У. Что произойдетъ съ дробью $^1/_7$, если ея знаменателя умножить на 4?

Д. Получится дробь $^1/_{28}$.

У. Покажите на таблицѣ $^1/_7$ въ томъ квадратѣ, который сверхъ дѣленія на 7 частей раздѣленъ еще на 28.

Д. Вотъ $^1/_7$ (указывая на четвертый квадратъ седьмаго горизонтальнаго ряда).

У. Гдѣ тутъ $^1/_{28}$?

Д. Вотъ $^1/_{28}$

У. Которая изъ дробей $^1/_7$ или $^1/_{28}$ болѣе?

Д. $^1/_7 > ^1/_{28}$

У. Почему?

Д Потому что *седьмыхъ* въ цѣломъ только *семь*, а *двадцать-осьмыхъ* 28.

У. Сколько же *двадцать-осьмыхъ* должно взять, чтобы получить $^1/_7$?

Д. 4 доли.

У. Почему?

Д Потому что $^{28}/_{28}$, раздѣленныя на 7 равныхъ частей, даютъ на каждую часть по $^4/_{28}$.

У. Что же надобно сдѣлать, чтобы $^1/_7$ привести въ *двадцать-осьмыя* доли?

Д. Надобно числителя и знаменателя дроби $^1/_7$ помножить на 4. Письменно: $\frac{1 \times 4}{7 \times 4} = {}^4/_{28}$

У. Узнайте, сколько вмѣсто $^1/_5$ можно имѣть *десятыхъ, пятнадцатыхъ, двадцатыхъ, двадцать-пятыхъ.*

Д. $^1/_5 = {}^2/_{10}$; $^1/_5 = {}^3/_{15}$; $^1/_5 = {}^4/_{20}$; $^1/_5 = {}^5/_{25}$

У. Какъ вы поступили при нахожденіи искомыхъ дробей?

Д. Для полученія десятыхъ вмѣсто пятыхъ, числителя и знаменателя дроби $^1/_5$ помножили на 2, для полученія *пятнадцатыхъ* — на 3, *двадцатыхъ* — на 4, а *двадцать-пятыхъ* — на 5.

Вопросъ. Какія получатся дроби, если оба члена дроби $^1/_{11}$ будутъ помножены на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10?

Отвѣтъ: $^2/_{22}$, $^3/_{33}$, $^4/_{44}$, $^5/_{55}$, $^6/_{66}$, $^7/_{77}$, $^8/_{88}$, $^9/_{99}$, $^{10}/_{110}$

У. Какія это дроби между собою?

Д. Онѣ всѣ равны между собою; ихъ разница только въ видѣ, а не въ величинѣ.

У. Какимъ же образомъ должно поступить, чтобы получить нѣсколько равныхъ, но разнаго вида дробей?

Д. Взять какую-либо дробь и какъ числителя такъ и знаменателя ея множить то на одно, то на другое цѣлое число: каждое произведенiе будетъ выражать дробь такого рода.

Отъ основныхъ или простыхъ дробей учитель переходитъ къ сложнымъ.

У. (указывая на двѣ трети втораго квадрата третьяго горизонтальнаго ряда). На сколько равныхъ частей раздѣленъ этотъ квадратъ?

Д. На 6 равныхъ частей.

У. Сколько *шестыхъ* считается въ $^2/_3$?

Д. *Четыре шестыхъ.*

У. Сравнивая между собою числителей и знаменателей этихъ дробей, что̀ примѣчаемъ?

Д. Числитель второй дроби ($^4/_6$) вдвое болѣе числителя первой ($^2/_3$); тоже отношенiе и между знаменателями.

У. (указывая на третiй квадратъ того же ряда). Въ $^2/_3$ сколько *девятыхъ*?

Д. $^6/_9$.

У. Почему?

Д. Въ цѣломъ $^9/_9$; въ $^1/_3$ содержится $^3/_9$, а въ $^2/_3$, $^6/_9$

По прохожденiи цѣлаго ряда, ученики повторяютъ: $^2/_3 = {}^4/_6 = {}^6/_9 = {}^8/_{12} = {}^{10}/_{15} = {}^{12}/_{18}$ и т. д.

Тоже и со всѣми прочими рядами.

Учитель не долженъ торопиться въ прохожденіи этихъ рядовъ, также не дѣлать скачковъ, если желаетъ впослѣдствіи облегчить себя. Здѣсь не та только цѣль, чтобы ученики хорошо усвоили себѣ правило: надобно довести ихъ до того, чтобы они научились свободно и быстро обращать одну дробь въ другую, не прибѣгая къ грифелю и доскѣ.

Вопросъ. Обратить дробь $^5/_6$ въ *двѣнадцатыя, осмнадцатыя, двадцать-четвертыя* доли.

Отвѣтъ. $^5/_6={}^{10}/_{12}={}^{15}/_{18}={}^{20}/_{24}$. Дробь $^5/_6$ обратится въ *двѣнадцатыя*, если ея числителя и знаменателя помножить на 2; въ *осмнадцатыя*, если ея числителя и знаменателя помножить на 3, а въ *двадцать-четвертыя* — на 4.

Вопросъ. Какія новыя дроби получатся чрезъ умноженіе числителя и знаменателя дроби $^8/_9$ на 7, 3, 13?

Отвѣтъ. $^{56}/_{63}$, $^{24}/_{27}$, $^{104}/_{117}$.

У. Мы уже видѣли, что если числитель дроби помножится на какое-либо число, сама дробь также увеличится, если же ея знаменателя взять нѣсколько разъ, она уменьшится; въ какомъ же случаѣ дробь не перемѣнится?

Д. Дробь не перемѣнится, а только приметъ другой видъ въ томъ случаѣ, когда ея числитель и знаменатель помножатся на одно и тоже число.

в. Измѣненіе вида дроби чрезъ дѣленіе ея числителя и знаменателя на одинакое число (сокращеніе дробей).

Если дробь, выраженную въ мѣньшихъ числахъ, можно безъ всякаго измѣненія ея величины пред-

ставить въ бо̀льшихъ, то рождается обратный вопросъ: *какимъ образомъ дробь, выраженную въ большихъ числахъ изобразить мѐньшими числами, также не измѣняя ея достоинства?* Рѣшеніе этого обратнаго вопроса приведетъ насъ къ *сокращенію* дробей, такъ какъ рѣшеніе прямаго вопроса указываетъ намъ на правило *приведенія разнородныхъ дробей въ однородныя*, или все тоже, *приведенія дробей къ одинакому знаменателю*.

Ходъ предлежащей части упражненія совершенно обратный первой его части. Вмѣсто того, чтобъ указавъ на таблицѣ, напримѣръ, *одну треть*, спрашивать: сколько вмѣсто ея можно взять *шестыхъ, девятыхъ, двѣнадцатыхъ?* и проч., указываютъ на *двѣ шестыхъ*, на *три девятыхъ*, на *четыре двѣнадцатыхъ* и проч., тѣхъ же самыхъ квадратовъ, и спрашиваютъ: *какую одну часть составляетъ это отъ цѣлаго?* и проч. и проч.

У. (указывая на $^4/_{16}$ четвертаго квадрата четвертаго горизонтальнаго ряда). Вмѣсто $^4/_{16}$ какую одну часть цѣлаго получить можно?

Д. *Одну четверть.*

У. Почему?

Д. Въ цѣломъ квадратѣ $^{16}/_{16}$, значитъ что на каждую *четверть* приходится по $^4/_{16}$; ибо $^4/_{16}$ въ $^{16}/_{16}$ содержатся равно 4 раза.

У. (указывая на дроби $^4/_{16}$ и $^1/_4$). Какія доли представляетъ первая дробь и какія вторая?

Д. Первая представляетъ *шестнадцатыя*, а вторая *четверти*.

У. Во сколько разъ знаменатель первой дроби болѣе знаменателя второй?

Д. Въ 4 раза.

У. А числитель первой?

Д. Тоже въ 4 раза болѣе числителя второй.

У. Какъ же надобно поступить съ дробью $^4/_{16}$, чтобы привести ея въ *четверть*?

Д. Какъ ея числителя такъ и знаменателя раздѣлить на 4.

У. Перемѣнится ли чрезъ то дробь?

Д. Нѣтъ; она только измѣнитъ свой видъ.

У. (указывая на $^{12}/_{16}$ четвертаго квадрата четвертаго горизонтальнаго ряда). Выговорите эту дробь.

Д. $^{12}/_{16}$.

У. Сколько *четвертей* цѣлаго можно получить вмѣсто $^{12}/_{16}$?

Д. $^3/_4$.

У. Почему?

Д. Въ цѣломъ $^{16}/_{16}$, а также $^4/_4$, значитъ, что каждыя $^4/_{16}$ равняются $^1/_4$; поэтому, сколько разъ 4 содержится въ 12, столько будетъ и четвертей; именно $^3/_4$.

У. Во сколько разъ знаменатель дроби $^{12}/_{16}$ болѣе знаменателя дроби $^3/_4$.

Д. Въ 4 раза.

У. А числитель первой?

Д. Тоже въ 4 раза болѣе числителя второй.

У. Что же надобно сдѣлать съ дробью $^{12}/_{16}$, чтобъ привести ее въ ме́ньшій видъ, не измѣняя впрочемъ ея достоинства?

Д. Раздѣлить, какъ ея числителя такъ и знаменателя, на 4.

У. Что̀ произошло бъ съ дробью $^{12}/_{16}$, если бъ только ея числителя раздѣлить на 4?

Д. Тогда бъ получили дробь $^{3}/_{16}$, которая *вчетверо* менѣе дроби $^{12}/_{16}$.

У. Итакъ, что же должно сдѣлать съ дробью, чтобы при уменьшеніи числа частей она не уменьшила своей величины?

Д. Сдѣлать части во столько же разъ крупнѣе, во сколько было уменьшено ихъ число.

У. Какъ поступить въ такомъ случаѣ?

Д. Уменьшить знаменателя тоже въ 4 раза; тогда вмѣсто *шестнадцатыхъ* получимъ *четверти.*

Вопросъ. Дроби $^{16}/_{20}$, $^{7}/_{21}$, $^{24}/_{30}$ изобразить въ ме́ньшихъ числахъ.

Отвѣтъ. Раздѣливъ числителя и знаменателя первой дроби на 4, приведемъ ее къ виду: $^{4}/_{5}$; раздѣливъ числителя и знаменателя второй дроби на 7, получимъ вмѣсто ея $^{1}/_{3}$; раздѣливъ же числителя и знаменателя третьей дроби на 6, получимъ вмѣсто ея $^{4}/_{5}$.

У. Первая и послѣдняя дроби приведены къ одному виду: $^{4}/_{5}$; что можно тутъ замѣтить?

Д. Что обѣ эти дроби равны между собою.

У. Слѣдственно, дроби могутъ быть равныя, хотя и выражены въ разныхъ доляхъ. Приведите еще примѣръ такихъ дробей.

Д. $^{8}/_{12}$ и $^{24}/_{36}$.

У. Почему?

Д. Раздѣливъ числителя и знаменателя первой дроби на 4, получимъ вмѣсто ея $^{2}/_{3}$; раздѣливъ числителя и знаменателя второй дроби на 12, по.

лучимъ также $^{2}/_{3}$. Слѣдственно, обѣ дроби равны.

У. Какимъ же образомъ должно вообще поступить съ дробью, чтобъ, безъ измѣненія ея достоинства, представить ее въ ме́ньшихъ числахъ?

Д. Раздѣлить оба ея члена на одно и тоже число.

У. Уменьшить числителя и знаменателя дроби въ нѣсколько разъ значитъ *сократить* ее. Дѣйствіе, посредствомъ котораго оба члена дроби, будучи выражены въ большихъ числахъ, приводятся въ ме́ньшія, впрочемъ безъ измѣненія величины самой дроби, именуется въ Ариѳметикѣ *сокращеніемъ* дробей.

Что такое сокращеніе? — На какомъ изъ главныхъ ариѳметическихъ дѣйствій оно основывается?

Числитель и знаменатель всякой дроби легко и безъ затрудненія множится на цѣлое число; не то бываетъ при ихъ дѣленіи, потому что не всякое число дѣлится на другое безъ остатка. Отсюда ясно, что если всякую дробь можно представить въ большихъ числахъ, за то не всякую дробь можно сократить. Такъ дробь $^{17}/_{19}$ не можетъ быть сокращена, потому что нѣтъ такого числа, на которое бы какъ ея числитель такъ и знаменатель раздѣлились безъ остатка.

Только тѣ дроби сокращаются, которыхъ члены не суть *первыя между собою числа*. Другими словами: дробь сокращается только на тѣ числа, которыя входятъ множителями въ оба ея члена.

Здѣсь учитель припоминаетъ ученикамъ, что̀ такое *первое число*, что̀ значитъ *первыя между собою*

числа, какъ понимать выраженіе: *число, входящее множителемъ въ другое число.* (См. No. 29).
Есть особые признаки, по которымъ тотчасъ можно узнать, на какія именно числа сокращается данная дробь; но объ этомъ здѣсь еще не у мѣста говорить.

Сокращеніе требуетъ продолжительнаго упражненія, сперва надъ дробями, выраженными въ мéньшимъ числахъ, а потóмъ въ бóльшихъ. Вотъ какую постепенность можно здѣсь наблюдать (что уже видно было изъ самаго хода упражненія):

1. Сначала берутъ дроби, которыхъ числители содержатся безъ остатка въ своихъ знаменателяхъ. Въ результатѣ сокращенія получаются основныя дроби.

Такъ: $^3/_{12} = ^1/_4$; $^4/_{20} = ^1/_5$; $^5/_{10} = ^1/_2$; $^{17}/_{34} = ^1/_2$ и проч.

Почему $^3/_{12} = ^1/_4$?

Доказательство. $^{12}/_{12}$ = цѣлому; $^3/_{12}$ = 3 такимъ частямъ цѣлаго. Такъ какъ 3 есть *четвертая* часть 12, то и $^3/_{12}$ есть тоже $^1/_4$ отъ $^{12}/_{12}$. Или, 3 части цѣлаго, раздѣленнаго на 12 равныхъ частей, составляютъ *одну* такую часть, которыхъ въ цѣломъ содержится равно 4.

2. Далѣе, дроби, которыхъ числители не содержатся въ своихъ знаменателяхъ безъ остатка. Здѣсь въ результатѣ всегда получится *сложная* дробь.

Напримѣръ: $^{10}/_{12} = ^5/_6$, потому что $^{12}/_{12} = 1$ ц.; 10 составляютъ $^5/_6$ отъ 12; потому $^{10}/_{12}$ все равно, что $^5/_6$.

Самыя очевидныя, такъ сказать, наглядныя доказательства доставляетъ таблица No. III, какъ уже видѣли выше.

5. Сложные вопросы.

1. Какія дроби отъ $^1/_{12}$ до $^{11}/_{12}$ сокращаются?

2. Какія изъ нихъ не сокращаются? — Почему?

3. Наименуйте нѣсколько дробей, которыя могутъ сократиться на 2, 3, 4, 7, 9 и т. д.

4. На какія числа сокращается дробь $^{60}/_{120}$?

Отв. На 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Рѣшеніе.

$60 = 30 \times 2$, $120 = 60 \times 2$; поэтому $^{60}/_{120} = ^{30}/_{60}$;
$60 = 20 \times 3$, $120 = 40 \times 3$; $^{60}/_{120} = ^{20}/_{40}$;
$60 = 15 \times 4$, $120 = 30 \times 4$; $^{60}/_{120} = ^{15}/_{30}$;
$60 = 12 \times 5$, $120 = 24 \times 5$; $^{60}/_{120} = ^{12}/_{24}$;

и т. д. до

$60 = 1 \times 60$; $120 = 2 \times 60$; поэтому $^{60}/_{120} = ^1/_2$.

Наконецъ замѣтимъ, что если $^1/_3 = ^3/_9 = ^6/_{18}$ и т. д., то $\frac{1 \times 5}{3 \times 5} = ^5/_{15}$; $\frac{3 \times 6}{9 \times 6} = ^{18}/_{54}$, также $\frac{6 : 3}{18 : 3} = ^2/_6$; всѣ эти выводы равны между собою. Отсюда слѣдуетъ: *если двѣ или болѣе дробей равны между собою, то и дроби, происшедшія отъ умноженія, или дѣленія, ихъ числителей и знаменателей на одинакое число, также равны между собою.* Другими словами: *дробь не измѣняетъ своей величины, если оба ея члена будутъ умножены, или раздѣлены на одно и тоже число.*

N° 47. ПЯТНАДЦАТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Приведеніе дробей къ одинакому знаменателю.

Цѣль приведенія дробей къ одинакому знаменателю состоитъ въ томъ, чтобы разнородныя дроби

обращать въ однородныя. Этой цѣли достигаютъ чрезъ нахожденіе общаго знаменателя и прінсканія къ нему соотвѣтственныхъ числителей. Способъ приведенія дробей къ одинакому знаменателю, или отысканіе общаго знаменателя основывается на замѣчаніи, выведенномъ въ предыдущемъ упражненіи, а именно: *дробь не измѣнитъ своей величины, если оба ея члена помножатся на одно и тоже число.* Однако, здѣсь необходимо присовокупить, что общій знаменатель долженъ быть выраженъ сколько возможно малымъ числомъ, ибо чѣмъ въ меньшихъ числахъ обозначены дроби, тѣмъ исчисленіе надъ ними дѣлается проще и удобнѣе.

Послѣ изложеннаго нами въ предыдущихъ упражненіяхъ, считаемъ излишнимъ вдаваться въ какую-либо подробность, такъ какъ все дѣло состоитъ здѣсь въ пріобрѣтеніи навыка, къ чему не мало способствуетъ послѣдняя таблица. Впрочемъ вотъ постепенность, которой должно слѣдовать.

a. Дроби, которыхъ знаменатели содержатся одинъ въ другомъ безъ остатка.

1. Привести къ одинакому знаменателю дроби $^2/_3$ и $^7/_9$.

Рѣшеніе. $^6/_9$ и $^7/_9$; потому что на $^1/_3$ приходится $^3/_9$, а на $^2/_3$ вдвое болѣе, или $^6/_9$.

2. Въ какихъ одинакихъ доляхъ могутъ быть выражены слѣдующія дроби: $^2/_3$, $^3/_4$, $^5/_6$ и $^{11}/_{12}$?

Отв. Въ *двѣнадцатыхъ*, а именно: $^8/_{12}$, $^9/_{12}$, $^{10}/_{12}$ и $^{11}/_{12}$; потому что если числителя и знаменателя первой дроби помножить на 4, то получится $^8/_{12}$;

числителя и знаменателя второй на 3, то выйдетъ $^9/_{12}$ и т. д.

3. Привести къ одинакому знаменателю:

aa) $^5/_8$ и $^{11}/_{16}$;
bb) $^4/_9$ и $^{17}/_{18}$;
cc) $^2/_5$, $^3/_{10}$, $^{19}/_{40}$.

Разсматривая знаменателей въ каждомъ изъ предложенныхъ примѣровъ порознь, замѣчаемъ, что бо́льшій изъ нихъ содержитъ въ себѣ прочихъ безъ остатка. Это приводитъ насъ къ заключенію, что въ каждомъ изъ означенныхъ примѣровъ бо́льшій знаменатель можетъ служить также и *общимъ*. Дѣйствительно, при приведеніи, напримѣръ, $^5/_8$ и $^{11}/_{16}$ въ одинакія части, вся трудность состоитъ въ отыскані и числа, на которое должны быть помножены оба члена дроби, чтобы, не измѣняя ея величины, привести ее въ одинакія доли съ тою дробью, которая выражена въ бо́льшихъ числахъ; но какъ 8 въ 16 содержится равно 2 раза, то очевидно, если числителя и знаменателя дроби $^5/_8$ умножимъ на 2, то и получимъ дробь однородную съ дробью $^{11}/_{16}$.

Во всякомъ случаѣ, когда самый большой изъ знаменателей двухъ или нѣсколькихъ разнородныхъ дробей есть кратное число вразсужденіи прочихъ знаменателей, онъ есть въ тоже время и общій; потому что недовольно привести дроби къ одинакому знаменателю, надобно чтобы общій знаменатель составлялъ сколько возможно малое число.

b, *Дроби, которыхъ бо́льшій изъ знаменателей не содержитъ въ себѣ безъ остатка всѣхъ прочихъ изъ нихъ, но*

которыхъ знаменатели не суть также и первыя между собою числа.

1. $^{3}/_{4}$ и $^{5}/_{6}$ привести къ одинакому знаменателю.

Рѣшеніе. Надобно пріискать этимъ дробямъ знаменателя общаго и вмѣстѣ сколько возможно мѐньшаго: такой знаменатель есть 12. Чтобъ обѣ дроби привести въ *двѣнадцатыя* доли, должно числителя и знаменателя первой помножить на 3, а второй на 2, — чрезъ что и получимъ $^{9}/_{12}$ и $^{10}/_{12}$. Общимъ знаменателемъ двухъ данныхъ дробей не можетъ быть ни число 8, ни число 10; потому что если 4 можно увеличить вдвое, чтобы получить 8, за то нѣтъ такого цѣлаго числа, которое, будучи умножено на 6, давало бы 8; тоже и вразсужденіи числа 10. Данныя дроби приводятся также и въ 24 части, ибо $^{3}/_{4} = ^{18}/_{24}$, а $^{5}/_{6} = ^{20}/_{24}$; но знаменатель 24 есть число бо̀льшее 12.

2. Привести къ одинакому знаменателю $^{7}/_{8}$ и $^{9}/_{10}$.

Рѣшеніе. $^{35}/_{40}$ и $^{36}/_{40}$. Привести дроби къ одинакому знаменателю значитъ найти ихъ общаго знаменателя. Общимъ знаменателемъ должно быть такое число, въ которомъ оба частные знаменателя содержались бы безъ остатка. Здѣсь искомое число есть 40. *Сороковыя* части въ пять разъ мельче *осьмыхъ*; итакъ, чтобъ дробь $^{7}/_{8}$, по приведеніи въ сороковыя части не измѣнила своей величины, надобно вмѣсто *семи* частей взять 5×7 или 35 частей; точно также вмѣсто 9 *десятыхъ* должно взять 4×9 или 36 *сороковыхъ*. (Это рѣшеніе дѣлается чрезвычайно нагляднымъ по послѣдней таблицѣ, и

потому пока ученики не утвердились въ исчисленіи, учитель долженъ чаще къ ней прибѣгать).

5. Выразить слѣдующія дроби въ одинакихъ доляхъ: $^8/_9$, $^5/_6$ и $^{11}/_{12}$.

Рѣшеніе. $^{32}/_{36}$, $^{30}/_{36}$ и $^{33}/_{36}$. Общимъ знаменателемъ должно быть, во-первыхъ, сколько возможно мéньшее число, во-вторыхъ, такое, въ которомъ бы всѣ частные знаменатели содержались безъ остатка. Въ приведенномъ примѣрѣ это число есть 36 На $^1/_9$ приходится $^4/_{36}$ (показывая на таблицѣ, на $^8/_9$ выйдетъ $8 \times {}^4/_{36}$ или $^{32}/_{36}$; $^1/_6 = {}^6/_{36}$, $^5/_6 = 5 \times {}^6/_{36}$ или $^{30}/_{36}$; $^1/_{12} = {}^3/_{36}$, $^{11}/_{12} = 11 \times {}^3/_{36}$ $= {}^{33}/_{36}$.

Въ этой Первой Степени мы не приводимъ общихъ правилъ, или сколько можно стараемся говорить о нихъ слегка, во-первыхъ, потому, что правила какъ-то стѣсняютъ умственную дѣятельность, которая въ элементарномъ преподаваніи особенно должна быть возбуждаема; во-вторыхъ, потому, что ученикъ, будучи руководимъ въ разрѣшеніи примѣровъ учителемъ, естественнымъ и простымъ образомъ самъ пріидетъ къ нимъ, и тогда онѣ не будутъ для него дѣломъ одной памяти. Конечно этотъ путь нѣсколько медленъ, но за то, что въ началѣ проигрывается, впослѣдствіи возвращается сторицею. Вещь рѣшенная и неоспоримая.

c. *Дроби, которыхъ знаменатели суть первыя между собою числа.*

1. $^3/_5$ и $^4/_7$.

Рѣшеніе. $^{21}/_{35}$ и $^{20}/_{35}$. Здѣсь ни одно изъ чиселъ отъ 1 до 35, за исключеніемъ послѣдняго, не

можетъ быть общимъ знаменателемъ, потому что ни въ одномъ изъ нихъ *оба* знаменателя не содержатся безъ остатка. Итакъ, для полученія общаго знаменателя, оба частные знаменателя между собою перемножаются, что и дастъ 35. Чтобы $^3/_5$ привести въ *тридцать-пятыя* доли, должно, какъ числителя такъ и знаменателя этой дроби, помножить на 7; а для приведенія дроби $^4/_7$ въ тѣже доли, надобно оба члена ея увеличить въ 5 разъ.

2. $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$.

Рѣшеніе. $^{40}/_{60}$, $^{45}/_{60}$, $^{48}/_{60}$. Самый ме́ньшій общій знаменатель означенныхъ трехъ дробей есть число 60; потому что ни въ которомъ изъ ме́ньшихъ этого чиселъ всѣ частные знаменатели, 3, 4, 5 не содержатся безъ остатка. Чтобы дробь $^2/_3$ привести въ 60 доли, нужно числителя и знаменателя ея помножить на 20, или 4×5, т. е. *на произведеніе двухъ прочихъ знаменателей*; для приведенія дроби $^3/_4$ въ 60 доли, надобно оба ея члена помножить на 15, или 5×3, т. е. *на произведеніе всѣхъ частныхъ знаменателей, исключая своего* и т. д.

N° 48. ШЕСТНАДЦАТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Разныя исчисленія надъ дробными числами.

Изложенное въ предыдущихъ пятнадцати упражненіяхъ кажется достаточнымъ, чтобы прямо приступить теперь къ различнымъ выкладкамъ надъ дробными числами. Само собою разумѣется, что предложенныя нами таблицы, какъ вспомогательныя средства, здѣсь уже не употребляются; впро-

чемъ, если кто-либо изъ учениковъ послѣ всего пройденнаго станетъ затрудняться при исчисленіи, то, не теряя по пустому времени въ толкованіи, лучше снова взять ихъ въ помощь.

I. *Сложеніе дробей.*

1. *Сложить* $\frac{2}{3}$ съ $\frac{5}{6}$.

Рѣшеніе. $\frac{9}{6}$ или $1\frac{1}{2}$. Прежде нежели сложить эти дроби, надобно привести ихъ къ одинакому, сколько возможно мѐньшему, знаменателю. Такой знаменатель есть 6, потому что мѐньшій изъ данныхъ знаменателей (3) въ бо̀льшемъ (6) содержится безъ остатка. $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{6} = \frac{4}{6}$; $\frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} = 1\frac{3}{6}$; но дробь сокращается на 3; итакъ $1\frac{3}{6} = 1\frac{1}{2}$.

2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = ?$

Рѣш. $\frac{13}{12}$ или $1\frac{1}{12}$. Самый мѐньшій общій знаменатель данныхъ дробей есть 12, ибо числа 2, 3, 4 содержатся въ немъ безъ остатка. $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$; $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$; $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$; $\frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$.

Другое рѣшеніе. Вмѣсто $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ можно взять $\frac{3}{4}$; итакъ, остается $\frac{3}{4}$ сложить съ $\frac{1}{3}$. *Трети* и *четверти* выражаются въ *двенадцатыхъ* доляхъ, $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$; $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{3}{12} = \frac{9}{12}$; $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$; $\frac{9}{12} + \frac{4}{12} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$.

3. $\frac{5}{7} + \frac{8}{9} = ?$

Рѣш. $\frac{101}{63}$ или $1\frac{38}{63}$. Здѣсь одинакія доли не могутъ быть менѣе 63. $\frac{1}{7} = \frac{9}{63}$; $\frac{5}{7} = \frac{5 \times 9}{63} = \frac{45}{63}$; $\frac{1}{9} = \frac{7}{63}$; $\frac{8}{9} = \frac{8 \times 7}{63} = \frac{56}{63}$; $\frac{45}{63} + \frac{56}{63} = \frac{101}{63}$; $\frac{101}{63} = \frac{63}{63} + \frac{38}{63} = 1\frac{38}{63}$.

4. *Сложить* $2\frac{2}{3}$ *съ* $7\frac{5}{8}$.

Рѣш. $10\frac{7}{24}$. Сперва слагаются цѣлыя числа, а пото̀мъ дробныя. $2 + 7 = 9$; $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$, $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 8}{24} = \frac{16}{24}$; $\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$, $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3}{24} = \frac{15}{24}$; $\frac{16}{24} + \frac{15}{24} = \frac{31}{24} = \frac{24}{24} + \frac{7}{24} = 1\frac{7}{24}$.

5. *Что составитъ* $\frac{2}{5}$ *аршина съ* $\frac{2}{3}$ *вершка?*

Рѣш. $7\frac{1}{15}$ верш. или $\frac{53}{120}$ арш. Чтобы доли аршина сложить съ долями вершка, надобно или доли аршина при-

вести въ вершки, или вершки въ доли аршина. Отсюда два рѣшенія: 1) вмѣсто $\frac{2}{5}$ арш. можно получить въ 16 разъ болѣе вершковъ, т. е. $16 \times \frac{2}{5}$ вер. или $\frac{32}{5}$ в. или $6\frac{2}{5}$ вершка. Теперь остается сложить $6\frac{2}{5}$ верш. съ $\frac{2}{3}$ верш. $\frac{2}{5}=\frac{2 \times 3}{15}=\frac{6}{15}$; $\frac{2}{3}=\frac{2 \times 5}{15}=\frac{10}{15}$; $\frac{6}{15}+\frac{10}{15}=\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}$; $6+1\frac{1}{15}=7\frac{1}{15}$. 2) Для приведенія $\frac{2}{3}$ верш. въ доли аршина, должно дробь $\frac{2}{3}$ уменьшить въ 16 разъ, а дробь уменьшится въ 16 разъ, когда ея знаменатель помножится на 16. Итакъ $\frac{2}{3}$ вер. $=\frac{2}{3 \times 16}$ арш. $=\frac{2}{48}$ ар. или, по сокращеніи на 2, $=\frac{1}{24}$ ар. Дроби $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{24}$ имѣютъ общимъ знаменателемъ число 120. $\frac{2}{5}=\frac{2 \times 24}{120}=\frac{48}{120}$; $\frac{1}{24}=\frac{5}{120}$; $\frac{48}{120}+\frac{5}{120}=\frac{53}{120}$.

Примѣненія. Какую часть составятъ отъ мѣсяца слѣдующія его части: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$, и сколько въ этой части будетъ дней, полагая вообще, что мѣсяцъ имѣетъ 30 дней?— Сколько всего получится дюймовъ, если сложить $\frac{2}{3}$ сажени съ $\frac{2}{3}$ фута?—Если $\frac{3}{5}$ числа 44 сложить съ $\frac{1}{8}$ числа 10, то какая выйдетъ сумма?—Найти пару такихъ дробей, изъ которыхъ одна была бы болѣе другой $\frac{4}{9}$.—Сколько получится денегъ, если къ $\frac{11}{12}$ рубля прибавить столько же, да еще $\frac{4}{5}$ рубля?—Отъ мѣста А до мѣста В разстоянія $5\frac{3}{4}$ версты, а отъ мѣста В до мѣста С разстоянія $\frac{8}{9}$. На сколько верстъ отстоитъ А отъ С?—Тѣло, свободно падающее въ воздухѣ, въ первую секунду своего паденія пробѣгаетъ $15\frac{3}{8}$ фута; но чѣмъ ближе оно къ землѣ, тѣмъ ускоряетъ свой ходъ въ каждую слѣдующую секунду на $31\frac{1}{8}$ фута. Какое разстояніе пробѣжитъ тѣло такимъ образомъ въ 4 секунды?—Въ 1 пудѣ $2\frac{5}{8}$ фунта и $7\frac{1}{4}$ фунта, сколько всего фунтовъ?—Узнайте, сколько у меня было денегъ, спрашиваетъ одинъ ученикъ у другаго: сперва я издержалъ $1\frac{1}{3}$ руб., потòмъ $\frac{2}{3}$ рубля, да у меня еще остается $2\frac{1}{4}$ р.? —

II. *Вычитаніе дробей.*

1. *Изъ $\frac{5}{8}$ вычесть $\frac{1}{4}$.*

Рѣш. Въ остаткѣ $\frac{3}{8}$. Общій знаменатель данныхъ дробей есть 8; $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$; $\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$.

2. Изъ 3 отнять $\frac{8}{17}$.

Рѣш. $2\frac{9}{17}$. $3=2+\frac{17}{17}$; $\frac{17}{17}-\frac{8}{17}=\frac{9}{17}$; $2+\frac{9}{17}=2\frac{9}{17}$.

3. $2\frac{1}{7}-\frac{5}{11}=?$

Рѣш. $1\frac{53}{77}$. Такъ какъ дробь $\frac{5}{11}$ болѣе дроби $\frac{1}{7}$, поэтому $\frac{5}{11}$ изъ $\frac{1}{7}$ вычесть невозможно. Но смѣшанное число $2\frac{1}{7}$ все равно, что $1+\frac{7}{7}+\frac{1}{7}$, или $1\frac{8}{7}$; $\frac{8}{7}$ и $\frac{5}{11}$, по приведеніи въ одинакія доли, обратятся въ $\frac{88}{77}$ и $\frac{35}{77}$; $\frac{88}{77}-\frac{35}{77}=\frac{53}{77}$. Приложивъ къ послѣдней дроби остающуюся 1, получимъ всего въ остаткѣ $1\frac{53}{77}$.

Изъ предложеннаго примѣра видно, что прежде дѣйствительнаго вычитанія дроби изъ дроби, надобно ихъ сравнить между собою, чтобы узнать, которая изъ нихъ болѣе; но какъ узнавать, что одна дробь болѣе другой? —

4. *Что получится въ остаткѣ, если изъ $3\frac{4}{5}$ отнять $\frac{2}{3}$ и еще $1\frac{3}{4}$?*

Отв. Въ остаткѣ будетъ $1\frac{23}{60}$.

Первое рѣш. Изъ $3\frac{4}{5}$ надобно вычесть $\frac{2}{3}$, а потòмъ изъ полученнаго остатка еще $1\frac{3}{4}$. Чтобы вычесть $\frac{2}{3}$ изъ $\frac{4}{5}$, должно обѣ дроби привести въ одинакія части; общій ихъ знаменатель есть 15. $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$; $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$; $3\frac{12}{15}-\frac{10}{15}=3\frac{2}{15}$. Чтобы возможно было изъ полученнаго остатка вычесть $1\frac{3}{4}$, число $3\frac{2}{15}$ представимъ такъ: $2\frac{15}{15}+\frac{2}{15}$ или $2\frac{17}{15}$; изъ этого остатка отнявъ сперва 1, получимъ $1\frac{17}{15}$; для отнятія же $\frac{3}{4}$, надобно эту дробь привести въ одинакія доли съ дробью $\frac{17}{15}$; общій знаменатель обѣихъ дробей есть 60. $\frac{17}{15}=\frac{68}{60}$; $\frac{3}{4}=\frac{45}{60}$; поэтому $1\frac{17}{15}$ безъ $\frac{3}{4}$ все равно, что $1\frac{68}{60}-\frac{45}{60}$ или $1\frac{23}{60}$.

Второе рѣшеніе Изъ $3\frac{4}{5}$ требуется отнять два числа: $\frac{2}{3}$ и $1\frac{3}{4}$; для этого оба числа сперва сложимъ, и сумму ихъ вычтемъ изъ $3\frac{4}{5}$. $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$; $1\frac{3}{4}=1\frac{9}{12}$; $\frac{8}{12}+1\frac{9}{12}=1\frac{17}{12}=2\frac{5}{12}$. Теперь вычтемъ изъ $3\frac{4}{5}$ сначала число 2; въ остаткѣ получимъ $1\frac{4}{5}$. Дробь $\frac{5}{12}$ иначе нельзя вычесть изъ $\frac{4}{5}$, пока обѣ дроби не приведутся въ одинакія части; общій знаменатель ихъ есть число 60. $\frac{4}{5}=\frac{48}{60}$; $\frac{5}{12}=\frac{25}{60}$. Поэтому $3\frac{4}{5}-2\frac{5}{12}=1\frac{4}{5}-\frac{5}{12}=1\frac{48}{60}-\frac{25}{60}=1\frac{23}{60}$.

5. *Уменьшить* $1\frac{1}{3}$ *пуда на* $8\frac{2}{7}$ *фунта.*

Рѣш. Чтобы $1\frac{1}{3}$ пуда уменьшить на $8\frac{2}{7}$ ф., должно прежде $1\frac{1}{3}$ пуда привести въ фунты 1 пудъ $=40$ ф., $\frac{1}{3}$ пуда$=40\times\frac{1}{3}$ ф.$=\frac{40}{3}$ ф.$=13\frac{1}{3}$ ф. 40 ф.$+13\frac{1}{3}$ ф.$=53\frac{1}{3}$ ф. — Теперь остается изъ $53\frac{1}{3}$ ф. вычесть $8\frac{2}{7}$ ф.

Примѣненія. Найти разность дробей $\frac{3}{7}$ и $\frac{3}{4}$. — Чѣмъ дробь $\frac{10}{12}$ болѣе или менѣе дроби $\frac{9}{13}$?— Что надобно приложить къ дроби $\frac{3}{8}$, чтобы вышло $\frac{5}{6}$? — На какую дробь надобно уменьшить число $2\frac{2}{9}$, чтобы получить въ остаткѣ $\frac{7}{4}$?— Какое число къ $2\frac{1}{7}$ вершка должно приложить для полученія $\frac{1}{4}$ аршина?—Отъ $\frac{1}{5}$ числа 100 надобно вычесть $\frac{3}{7}$ числа 20. — Что останется отъ *рубля*, если изъ него взять $\frac{1}{2}$ р., $\frac{3}{7}$ руб. и еще 14 копѣекъ? — Найти двѣ дроби, которыхъ сумма была бы равна $\frac{5}{11}$. —Я задумалъ двѣ неравныя дроби; если отъ бо̀льшей изъ нихъ вычесть мѐньшую, то въ остаткѣ выйдетъ точь-въ-точь такая дробь, какъ мѐньшая изъ задуманныхъ. Найти обѣ дроби.—Найти двѣ дроби, которыхъ разность была бы менѣе мѐньшей дроби. —

III. *Умноженіе дробей.*

Примѣч. Умноженіе дробей, какъ дѣйствіе независящее отъ приведенія ихъ къ общему знаменателю, было объяснено выше (Смот. № 45, отдѣлы 10 и 12); поэтому и нѣтъ нужды здѣсь болѣе говорить о немъ.

Примѣненія. Найти такія двѣ дроби, чтобы первая изъ нихъ составляла отъ другой $\frac{5}{9}$ частей. — Я задумалъ три числа: первое изъ нихъ есть $\frac{2}{3}$; второе составляетъ $\frac{6}{7}$ перваго, а третье $\frac{4}{5}$ втораго. Какія числа задуманы мною?— Что сто̀итъ $4\frac{3}{4}$ аршина матеріи, если за каждый аршинъ ея заплачено по $6\frac{2}{5}$ руб.? — На какое число надобно умножить данное число, чтобы уменьшить это число на *три четверти* того же числа? — Два работника купили вмѣстѣ 4 пуда $5\frac{3}{4}$ ф. муки; первому изъ этой муки надобно получить $\frac{2}{7}$ доли Сколько именно пудовъ и фунтовъ получить каждый изъ нихъ?

IV. *Дѣленіе дробей.*

1. *Раздѣлить* $\frac{5}{8}$ *на* 3.

Рѣш. $\frac{5}{24}$. Раздѣлить $\frac{5}{8}$ на 3 все то же значить, что взять отъ дроби $\frac{5}{8}$ *третью* часть, или уменьшить эту дробь въ три раза. Дробь уменьшится въ 3 раза, когда знаменатель ея во столько же разъ увеличится. Итакъ, $\frac{5}{8}: 3 = \frac{5}{8 \times 3} = \frac{5}{24}$.

2. $4: \frac{6}{7} = ?$

Первое рѣшеніе. $4\frac{2}{3}$. Число 4 раздѣлить на $\frac{6}{7}$ все тоже, что узнать, сколько разъ дробь $\frac{6}{7}$ можетъ содержаться въ числѣ 4; для этого приведемъ число 4 въ 7 доли. $4 = \frac{4 \times 7}{7}$ или $\frac{28}{7}$. Дробь $\frac{6}{7}$ столько же разъ содержится въ дроби $\frac{28}{7}$, сколько число 6 содержится въ 28, т. е. $\frac{28}{6}$, или $4\frac{4}{6}$, или $4\frac{2}{3}$ (Смот. 12 отдѣлъ № 45).

Второе рѣшеніе. Число 6 въ *семь* кратъ болѣе дроби $\frac{6}{7}$; поэтому если отъ 4 возмется *шестая* часть, то въ частномъ получится число въ 7 разъ менѣе настоящаго. Отсюда слѣдуетъ, когда отъ 4 взята *шестая* часть, то для полученія истиннаго частнаго, надобно *шестую* часть 4 увеличить еще въ 7 разъ; т. е. 4 раздѣлить на 6 и частное $\frac{4}{6}$ умножить на 7. Итакъ, $4: \frac{6}{7} = 4 \times \frac{7}{6} = \frac{28}{6} = 4\frac{4}{6} = 4\frac{2}{3}$.

3. *Узнать, сколько разъ* $\frac{5}{9}$ *содержится въ* $\frac{7}{8}$.

Рѣш. $1\frac{23}{40}$. Узнать сколько разъ $\frac{5}{9}$ содержится въ $\frac{7}{8}$ значитъ раздѣлить послѣднюю дробь на первую; но для этого должно прежде обѣ дроби привести въ однородныя части, т. е. къ общему знаменателю. $\frac{7}{8} = \frac{7 \times 9}{72} = \frac{63}{72}$, $\frac{5}{9} = \frac{5 \times 8}{72} = \frac{40}{72}$. Раздѣлить $\frac{63}{72}$ на $\frac{40}{72}$ все тоже, что раздѣлить 63 на 40. $63: 40 = \frac{63}{40} = 1\frac{23}{40}$.

4. $5\frac{3}{4}: 2\frac{3}{5} = ?$

Рѣш. $2\frac{11}{52}$. $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$; $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$; $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$, $\frac{23}{4} = \frac{23 \times 5}{20} = \frac{115}{20}$; $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$; $\frac{13}{5} = \frac{13 \times 4}{20} = \frac{52}{20}$. Итакъ, $5\frac{3}{4}: 2\frac{3}{5} = \frac{115}{20}: \frac{52}{20} = \frac{115}{52} = 2\frac{11}{52}$.

Примѣненія. На сколько времени станетъ рабочему $15\frac{3}{4}$ руб, когда онъ каждый день будетъ издерживать по $\frac{3}{5}$

рубля? — Найти двѣ дроби, изъ которыхъ одна была бы менѣе другой въ $2\frac{5}{9}$ раза.—На какое число надобно раздѣлить данное, чтобы оно увеличилось въ $2\frac{5}{4}$ раза? — Сумма двухъ дробей составляетъ $\frac{11}{15}$; первая изъ нихъ болѣе второй въ 5 разъ. Найти обѣ дроби.—Изъ двухъ чиселъ бо̀льшее есть $5\frac{2}{11}$, а седьмая часть частнаго, происходящаго отъ раздѣленія бо̀льшаго на мѐньшее, есть $\frac{1}{15}$. Какъ велика мѐньшая дробь? — Сколько разъ отъ 2 можно отнимать по $\frac{4}{15}$, чтобы получить въ остаткѣ о?—Чему бываетъ равна 1, раздѣленная на какую-либо дробь?—Много ли разъ къ числу 17 можно прибавлять дробь $\frac{2}{5}$, чтобы получить число 55?— Сколько разъ отъ 100 можно отнимать число $9\frac{3}{7}$, чтобы имѣть въ остаткѣ $19\frac{1}{5}$? —

Сложныя задачи, относящіяся къ дробнымъ числамъ.

Раздѣлить $2\frac{5}{6}$ на такія двѣ части, что если одну изъ нихъ раздѣлить на другую, то въ частномъ также получится $2\frac{5}{6}$. — Если число моихъ лѣтъ умножить на 5, и потомъ приложить $25\frac{1}{2}$, то получится тоже самое число, какое бы получили, умноживъ число моихъ лѣтъ на 3, и потомъ прибавивъ $87\frac{5}{4}$. Который мнѣ годъ? — Сложите $\frac{8}{9}$ съ $\frac{1}{4}$, изъ суммы вычтете $\frac{1}{7}$, и потомъ узнайте, сколько разъ отъ остатка можно отнимать дробь $\frac{1}{3}$, чтобы ничего въ немъ не осталось. — Тройное задуманное мною число вмѣстѣ съ $\frac{9}{17}$ составляетъ $5\frac{3}{4}$. Какое число я задумалъ? — Сумма двухъ дробей $\frac{10}{17}$, а разность между ними $\frac{1}{6}$. Найти дроби.—Отыскать число, котораго $\frac{1}{5}$ болѣе $\frac{1}{9}$ его въ $7\frac{5}{6}$ раза. — Какая это будетъ дробь, къ которой если прибавить $\frac{1}{5}$, то она составитъ $\frac{2}{5}$ отъ дроби $\frac{1}{4}$? — Если къ $\frac{3}{5}$ неизвѣстнаго числа прибавить $\frac{7}{8}$ того же числа и еще 950, то полу-

чится неизвѣстное число, увеличенное $\frac{1}{4}$ того же числа. Найти неизвѣстное. — Разность двухъ дробей $= \frac{5}{7}$; $\frac{1}{3}$ одного $= \frac{1}{5}$ другаго. Найти обѣ дроби. — Искомое число *такимъ числомъ меньше* $4\frac{1}{3}$, *во сколько разъ* дробь $\frac{2}{3}$ *больше* $\frac{5}{7}$. Чему равно искомое? — Найти число, котораго $\frac{1}{3}$, умноженная на $\frac{1}{4}$ того же числа, равна тому же самому числу. — $14\frac{3}{4}$ пуда муки раздѣлить на двѣ артели такъ, что если одна возметъ два фунта, то другая должна взять три фунта, и потомъ узнать, сколько каждая артель спечетъ для себя изъ этой муки хлѣбовъ когда въ каждомъ должно быть по $21\frac{1}{3}$ фунта. — Узнать число, отъ котораго если отнять $\frac{5}{7}$ его части, и потомъ изъ остатка $\frac{5}{8}$ того же остатка, то выйдетъ 45. — Отъ $\frac{3}{4}$ стопы бумаги отнимите $5\frac{2}{3}$ дести, и узнайте, сколько изъ остальной бумаги можно сдѣлать тетрадей, полагая въ каждой по $3\frac{1}{3}$ листа. —

Заключеніе. Въ послѣднихъ упражненіяхъ мы не предлагали никакихъ правилъ при исчисленіи дробными числами, довольствуясь одними рѣшеніями примѣровъ; это потому, что мы желаемъ, чтобы ученики сами мало-по-малу усвоивали себѣ правила, а не заучивали ихъ просто наизустъ. Конечно дѣло учителя и здѣсь руководствовать учениковъ, чтобы они кратчайшимъ путемъ достигали цѣли; однакожъ, все пособіе съ его стороны должно состоять въ однихъ вопросахъ, а отнюдь не въ толкованіяхъ, которыя, право, не рѣдко вмѣсто поясненія сбиваютъ лишь съ толку. Другое дѣло высшіе классы: тамъ учитель можетъ развивать предметъ послѣдовательно и отъ одного

своего лица; но въ низшихъ подобный способъ преподаванія никогда не принесетъ желанныхъ плодовъ. Если успѣхъ всего дальнѣйшаго образованія человѣка зависитъ много отъ количества самодѣятельности, возбужденной въ раннихъ лѣтахъ его жизни, то водить его на помочахъ значило бы вмѣсто облегченія увеличивать только труды.

Вопросы. Что прежде всего надобно сдѣлать съ данными неоднородными дробями, чтобы сложить ихъ между собою, или вычесть одну изъ другой, или наконецъ раздѣлить одну на другую? — Всегда ли общій знаменатель составляется изъ произведенія всѣхъ частныхъ знаменателей? — Въ какомъ случаѣ это правило имѣетъ мѣсто? — Въ какомъ случаѣ можно получить меньшаго общаго знаменателя? – Если изъ двухъ дробей, которыя слагаются или дѣлятся, знаменатель одной содержится въ знаменателѣ другой безъ остатка, то какое число можно взять въ этомъ случаѣ за общаго знаменателя? — Когда дроби приведены къ одинакому знаменателю, то какъ найти ихъ сумму, разность или частное? Какъ поступаютъ при вычитаніи дроби изъ цѣлаго числа? — Что должно сдѣлать съ смѣшаннымъ числомъ, если изъ него требуется вычесть дробь, которая превышаетъ входящую въ это смѣшанное число? — Если дроби, означающія дѣлимое и дѣлителя, выражены въ одинакихъ доляхъ, то въ какихъ числахъ будетъ выражена дробь, получаемая въ частномъ? — Какъ поступаютъ при умноженіи дроби на дробь? — А при умноженіи смѣшаннаго числа на другое смѣшан-

ное? — Составьте правила, которыми должно руководствоваться при сложеніи, вычитаніи, умноженіи и дѣленіи однородныхъ и разнородныхъ дробей. —

и проч. и проч.

ВТОРАЯ СТЕПЕНЬ.

РАЗЛИЧНЫЯ ДѢЙСТВІЯ НАДЪ ДРОБНЫМИ ЧИСЛАМИ ВООБЩЕ.

(письменныя исчисленія).

N° 49. ПЕРВОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Разныя измѣненія дробей.

Предложенныя нами въ Первой Степени правила для изустныхъ исчисленій надъ дробными числами будутъ недостаточны, если числа, въ которыхъ выражена дробь, довольно значительны. Хотя, въ сущности, правила и здѣсь не измѣняются, однакожъ по огромности чиселъ, входящихъ нерѣдко въ исчисленіе, необходимо бываетъ прибѣгать ко многимъ частнымъ правиламъ и облегчительнымъ пріемамъ, которые всѣ, болѣе или менѣе, имѣютъ цѣлію, *доставлять результаты сколько возможно въ простѣйшемъ видѣ.* Этихъ частныхъ правилъ и пріемовъ столько, что они съ избыткомъ наполняютъ довольно скудный скелетъ ариѳметическій, и требуютъ для усвоенія ихъ учениками строгой послѣдовательности и порядка въ изложеніи. Впрочемъ на то, о чемъ уже подробно было сказано прежде, мы будемъ дѣлать только ссылки. Преподающій, по усмотрѣнію, или повторяетъ извѣстное, или пропускаетъ, если не находитъ того нужнымъ.

a. *Опредѣленіе дроби.* (См. № 33).

b. *Двоякое происхожденіе дробей.* (См № 35).

c. *Изображеніе дробей цифрами.* (См. № 36).

d. *Взаимное сравненіе дробей.* (См. № 37).

1. *Изъ двухъ или нѣсколькихъ дробей, имѣющихъ одинакихъ знаменателей, та болѣе, у которой числитель болѣе прочихъ.*

Напр. $^5/_8 > ^3/_8$.

2. *Изъ двухъ или нѣсколькихъ дробей, имѣющихъ одинакихъ числителей, та болѣе, у которой знаменатель менѣе прочихъ.*

Напр. $^4/_7 > ^4/_{13}$.

e. *Различные роды дробей.* (См. № 38).

f. *Обращеніе цѣлыхъ и смѣшанныхъ чиселъ въ дроби, и обратно.* (См. № 39).

g. *Различныя измѣненія дробей.* (См. № № 41, 42 и 46).

1. *Если къ числителю дроби прибавимъ какое-либо цѣлое число, то дробь увеличится, и увеличится на столько частей, однородныхъ съ тѣми, которыя выражаются самою дробью, сколько единицъ въ прибавляемомъ цѣломъ числѣ.*

Напр. $^2/_7 < \frac{2+3}{7}$ или $^5/_7$ тремя седьмыми.

2. *Если къ знаменателю дроби прибавимъ какое-либо цѣлое число, то дробь уменьшится.*

Напр. $^2/_7 > \frac{2}{7+4}$ или $^2/_{11}$.

3. *Если къ обоимъ членамъ дроби прибавляется одно и тоже число, то получаемая отъ этого дробь будетъ болѣе предложенной, и чѣмъ прилагаемое число будетъ болѣе, тѣмъ и дробь болѣе.*

Доказательство. Пусть, напримѣръ, къ обоимъ членамъ дроби $^7/_{15}$ прибавится число 4; тогда вмѣ-

сто $^7/_{15}$ получимъ $^{11}/_{19}$. Говорю, что $^{11}/_{19}$ болѣе $^7/_{15}$. Разность между 1 и $^{11}/_{19}$ есть $^8/_{19}$, а между 1 и $^7/_{15}$ есть $^8/_{15}$; числители обѣихъ разностей одни и тѣже ($^8/_{19}$, $^8/_{15}$), что и должно быть, потому что числа 11 и 19 составились чрезъ прибавленіе къ числамъ, 7 и 15, одного и того же числа 4; значитъ, что между 19 и 11 находится такая же разность, какъ и между 7 и 15; но разность $^8/_{19}$ менѣе разности $^8/_{15}$ (См. 2 правило d), поэтому дробь $^{11}/_{19}$ ближе подходитъ къ единицѣ, нежели $^7/_{15}$; слѣдственно, первая болѣе второй. Очевидно также, что чѣмъ бо̀льшее число станемъ прибавлять къ обоимъ членамъ дроби $^7/_{15}$, тѣмъ разность между единицею и новою дробью будетъ менѣе, ибо числитель разности непремѣнный, именно 8, а знаменатель ея безпрестанно возрастаетъ; слѣдственно, самая дробь будетъ увеличиваться. Приведенное нами разсужденіе можно приложить ко всякой дроби.

4. *Обратно, дробь уменьшится, если изъ обоихъ ея членовъ вычтется какое-либо цѣлое число, и она будетъ безпрестанно уменьшаться, по мѣрѣ увеличенія вычитаемаго числа.*

Доказательство. Пусть изъ обоихъ членовъ дроби $^{13}/_{19}$ вычтется число 5; получимъ тогда въ остаткѣ $^8/_{14}$. Дробь $^8/_{14} < {}^{13}/_{19}$ потому, что въ $^8/_{14}$ до цѣлаго не достаетъ $^6/_{14}$, а въ дроби $^{13}/_{19}$ только $^6/_{19}$; но чѣмъ бо̀льшая разность между *единицею* и *дробью*, тѣмъ самая дробь менѣе. Тоже разсужденіе можно приложить и ко всякой другой дроби.

5. *Если, оставляя неизмѣняемымъ знаменателя дроби, умножимъ, или раздѣлимъ, ея числителя на какое-*

нибудь одно число, то полученная новая дробь будетъ во столько же разъ болѣе, или менѣе первой, сколько во множителѣ, или дѣлителѣ, находится единицъ.

Доказательство. Дѣйствительно, черезъ умноженіе числителя дроби на 2, 3, 4, 5....., мы показываемъ, что беремъ въ 2, 3, 4, 5..... разъ болѣе частей, нежели сколько было прежде взято; но какъ части остаются тѣже самыя, то и выходитъ, что новая дробь будетъ также въ 2, 3, 4, 5..... разъ болѣе прежней. Обратно, раздѣляя числителя на 2, 3, 4, 5..... тѣмъ означаемъ, что беремъ въ 2, 3, 4, 5.... разъ менѣе частей, нежели сколько въ началѣ было въ дроби; поэтому и самая дробь уменьшится въ 2, 3, 4, 5..... разъ.

Примѣры.

Дробь $^{3}/_{15}{}^{\times 2}$ вдвое $> {}^{3}/_{15}$;
» $^{3}/_{15}{}^{\times 3}$ втрое $> {}^{3}/_{15}$;
» $^{3}/_{15}{}^{\times 4}$ вчетверо $> {}^{3}/_{15}$ и т. д.

Обратно:

дробь $\frac{12:2}{15}$ вдвое $< {}^{12}/_{15}$;
» $\frac{12:3}{15}$ втрое $< {}^{12}/_{15}$;
» $\frac{12:4}{15}$ вчетверо $< {}^{12}/_{15}$.

6. *Если, не перемѣняя числителя, умножимъ, или раздѣлимъ, знаменателя дроби на какое-либо число, то дробь уменьшится, или увеличится, во столько разъ, сколько во множителѣ, или дѣлителѣ, находится единицъ.*

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, умножая знаменателя на 2, 3, 4, 5....., мы уменьшаемъ части цѣлаго тоже въ 2, 3, 4, 5..... разъ, между тѣмъ какъ число ихъ остается прежнее; значитъ, что

полученная отсюда дробь будетъ также въ 2, 3, 4, 5.... разъ менѣе прежней. Раздѣляя же знаменателя на 2, 3, 4, 5....., получаемъ на-оборотъ дробь болѣе данной въ 2, 3, 4, 5..... разъ; ибо при томъ же числѣ частей, части сами по себѣ становятся крупнѣе или болѣе прежнихъ въ 2, 3, 4, 5.... разъ.

Примѣры.

Дробь $\frac{2}{16 \times 2}$ вдвое $< {}^2/_{16}$;

» $\frac{2}{16 \times 3}$ втрое $< {}^2/_{16}$ и т. д.

Обратно:

дробь $\frac{2}{16:2}$ или $^2/_8$ вдвое $> {}^2/_{16}$;

» $\frac{2}{16:4}$ или $^2/_4$ вчетверо $> {}^2/_{16}$ и т. д.

7. *Дробь не перемѣнитъ своей величины, если оба ея члена умножатся, или раздѣлятся, на одно и тоже число.*

Доказательство. Черезъ умноженіе числителя дроби на какое-либо число, она увеличится во столько разъ, сколько единицъ во множителѣ; черезъ умноженіе знаменателя на тоже самое число, она во столько же разъ уменьшится; поэтому, умножая оба члена дроби на одно и тоже число, во сколько разъ числитель ея увеличится, во столько разъ знаменатель уменьшится,—значитъ самая дробь не измѣнитъ своей величины. Подобное же разсужденіе убѣждаютъ насъ и въ томъ, что дробь также не перемѣнитъ своей величины, если оба члена ея раздѣлятся на одно и тоже число.

Примѣръ. Дроби $^5/_8$ и $^{15}/_{24}$ равны между собою; потому что какъ числитель второй втрое болѣе числителя первой, такъ и знаменатель второй тоже

втрое болѣе знаменателя первой. Дробь $^{15}/_{24}$ есть только видоизмѣненіе дроби $^{5}/_{8}$. Если на $^{1}/_{8}$ считается $^{3}/_{24}$, то на $^{5}/_{8}$ должно быть въ 5 разъ болѣе, или $\frac{5 \times 3}{24} = {}^{15}/_{24}$.

Обратно, $^{1}/_{24}$ втрое менѣе $^{1}/_{8}$; слѣдственно, $^{3}/_{24}$ равняются $^{1}/_{8}$; но если $^{3}/_{24}$ равняются $^{1}/_{8}$, то $^{15}/_{24}$ или $\frac{5 \times 3}{24}$ должны быть въ пять разъ болѣе $^{1}/_{8}$, т. е. $^{5}/_{8}$.

На послѣднемъ правилѣ основываются два *преобразованія* дробей, которыя играютъ важную роль во всѣхъ исчисленіяхъ надъ дробными числами, а именно: 1) *сокращеніе дробей*, и 2) *приведеніе дробей къ одинакому знаменателю.* Эти преобразованія составятъ предметъ слѣдующихъ двухъ упражненій.

N° 50. ВТОРОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Сокращеніе дробей.

Цѣль сокращенія дробей состоитъ въ приведеніи ихъ къ простѣйшему виду, не перемѣняя впрочемъ ихъ значенія. Этой цѣли достигаютъ черезъ раздѣленіе обоихъ членовъ дроби на ихъ общаго дѣлителя. Такъ, напр., чтобы сократить дробь $^{12}/_{30}$, замѣчаемъ, что общій дѣлитель обоихъ ея членовъ есть 2; раздѣливъ такимъ образомъ числителя и знаменателя дроби $^{12}/_{30}$ на 3, получаемъ вмѣсто $^{12}/_{30}$ ей равнозначащую дробь $^{6}/_{15}$. Послѣдняя дробь еще можетъ быть сокращена на 2, ибо видно, что оба ея члена дѣлятся безъ остатка на 3, — что и приводитъ насъ окончательно къ дроби $^{2}/_{5}$. Итакъ, простѣйшій видъ дроби $^{12}/_{30}$ есть $^{2}/_{5}$ (См. N° 46—β).

Но здѣсь нельзя далѣе продолжать сокращенія, потому что члены послѣдней дроби ($^2/_5$) суть *числа первыя между собою*, которыя никакого общаго дѣлителя, кромѣ единицы, не имѣютъ. Изъ этого слѣдуетъ, что дробь тогда только вполнѣ сокращена, когда оба ея члена сдѣланы *первыми между собою* числами.

Означенный примѣръ письменно рѣшается такъ:

$$\frac{12}{30}\,\Big|\,\overset{2}{\frac{6}{15}}\,\Big|\,\overset{3}{\frac{2}{5}}$$

Изъясненіе. По правой сторонѣ данной дроби проводятъ вертикальную черту, на верху которой ставятъ общаго дѣлителя обоихъ членовъ дроби, а по правой сторонѣ частныя, получаемыя чрезъ раздѣленіе обоихъ членовъ на ихъ общаго дѣлителя. Если частныя, составляющія собою новую дробь, опять имѣютъ общаго дѣлителя, то дѣйствіе сокращенія обозначается такимъ же образомъ, и третья дробь пишется за второю, отдѣляясь отъ нея также вертикальною чертою.

Вся трудность сокращенія дробей состоитъ въ томъ, чтобы прямо находить *самаго большаго дѣлителя*, по раздѣленіи на котораго обоихъ членовъ дроби частныя становятся *числами первыми между собою.*

Теорія нахожденія дѣлителей чиселъ требуетъ предварительно изложенія слѣдующихъ трехъ правилъ:

Первое правило. Если какое-либо число дѣлится на другое безъ остатка, то и всякое произведеніе, составленное изъ него, также дѣлится на это другое безъ остатка.

Доказательство. Если какое-либо число содержится въ другомъ безъ остатка, то оно также безъ остатка будетъ содержаться въ томъ числѣ, взятомъ 2, 3, 4, 5 и т. д. разъ.

Примѣры.

Если $14:7=2$;

то $2\times14:7=2\times2=4$;

$3\times14:7=3\times2=6$;

$4\times14:7=4\times2=8$, и т. д.

Второе правило. Если обѣ части, равныя или неравныя, на которыя разложено какое-либо цѣлое число, дѣлятся безъ остатка на другое число, то и все число должно также раздѣлиться безъ остатка на это другое.

Доказательство. Пусть 24 разложено на двѣ неравныя части, 18 и 6; каждая изъ частей дѣлится нацѣло на 3, говорю, что и все число дѣлится также на 3 безъ остатка. Если 18 дѣлится на 3, то его можно представить черезъ 6×3; такимъ же образомъ 6 можно представить черезъ 2×3. Но $24=18+6$; поэтому $24=6.\ 3+2.\ 3=8.\ 3$. Итакъ, на число 24 можно взирать, какъ на произведеніе изъ двухъ множителей, 8 и 3. А какъ всякое произведеніе дѣлится на каждаго изъ своихъ сомножителей, слѣдственно и 24 раздѣлится на 3. Тоже разсужденіе можно приложить и ко всякому другому числу.

Третіе правило. Если все какое-либо число, разложенное на двѣ части, и одна изъ этихъ частей, дѣлятся безъ остатка на другое число, то и другая

часть разложеннаго числа также должна раздѣлиться на это другое число.

Доказательство. Пусть 30 разложено на двѣ части, 20 и 10. Если 30 и одна изъ его частей 20, дѣлятся безъ остатка, напримѣръ, на 5, то говорю, что и вторая часть 10, также должна дѣлиться нацѣло на 5. Число $10=30-20$; но $30=6.\ 5$, $20=4,\ 5$; поэтому $10=6.\ 5-4.\ 5=2.\ 5$; по $2.\ 5$ дѣлится на 5 безъ остатка. Тоже можно доказать и на счетъ всякаго другаго числа.

Такъ какъ сокращеніе дробей на первыя десять чиселъ чаще всего встрѣчается на практикѣ, то и обозначимъ сначала признаки, по которымъ бы тотчасъ можно было видѣть, какія именно числа могутъ дѣлиться безъ остатка на эти первыя десять чиселъ.

1. На 1 дѣлится всякое число; но какъ при сокращеніи на 1, дробь нисколько не измѣняетъ своего вида, то это сокращеніе и не приноситъ никакой пользы. Если оба члена дроби, кромѣ единицы не имѣютъ никакого другаго общаго дѣлителя, то дробь называется *несократимою.* Таковы суть дроби: $^{64}/_{87}$, $^{36}/_{55}$, $^{60}/_{77}$, $^{46}/_{65}$, $^{18}/_{25}$, $^{21}/_{26}$, $^{56}/_{69}$, $^{20}/_{39}$ и проч.

2. Всякое число дѣлится на 2 безъ остатка, если на мѣстѣ единицъ его будетъ находиться четное число или нуль; ибо въ такомъ случаѣ данное число состоитъ, или изъ нѣсколькихъ десятковъ и четнаго числа единицъ, или только изъ однихъ десятковъ. Число 2 содержится въ 1 десяткѣ равно 5 разъ, поэтому оно будетъ содержаться безъ остатка и во всякомъ числѣ десятковъ; въ четномъ

числѣ единицъ оно также содержится безъ остатка; слѣдственно, и во всемъ числѣ.

Напр. число 264 дѣлится на-цѣло на 2, потому что оно состоитъ изъ 260 и 4, или 26 дес. и 4 един.; но 26 дес. и 4 ед. дѣлятся безъ остатка на 2, значитъ и все число также дѣлится (См. второе правило предлежащаго упражненія).

Примѣры.

$$\frac{150}{360}\Big|\overset{2}{\frac{75}{180}} \qquad \frac{1900}{7200}\Big|\overset{2}{\frac{950}{3600}}\Big|\overset{2}{\frac{475}{1800}} \qquad \frac{114}{136}\Big|\overset{2}{\frac{57}{68}} \qquad \frac{58}{70}\Big|\overset{2}{\frac{29}{35}}$$

3. Всякое число дѣлится безъ остатка на 3, если сумма всѣхъ цифръ, его изображающихъ, дѣлится на 3.

Чтобы доказать это, мы сперва докажемъ, что всякое число десятковъ, сотенъ, тысячъ и т. д можетъ быть раздѣлено на 3 такъ, что въ остаткѣ получится таже цифра, которою означено самое число десятковъ, сотенъ, тысячъ и т. д. Такъ, напр.

1 десятокъ = 3 × 3 + 1
2 десятка = 6 × 3 + 2
3 » = 9 × 3 + 3
4 » = 12 × 3 + 4 и т. д.

1 сотня = 33 × 3 + 1
2 сотни = 66 × 3 + 2
3 » = 99 × 3 + 3
4 » = 132 × 3 + 4 и т. д.

1 тысяча = 333 × 3 + 1
2 тысячи = 666 × 3 + 2
3 » = 999 × 3 + 3
4 » = 1332 × 3 + 4 и т. д.

Отсюда заключаемъ, что всякое число, состоящее изъ десятковъ, сотенъ, тысячъ и проч., можетъ быть разложено на двѣ части, изъ которыхъ одна дѣлится безъ остатка на 3, а другая состоитъ изъ суммы остатковъ, выраженныхъ тѣми же числами, въ послѣдовательномъ порядкѣ, какими выражены самые десятки, сотни, тысячи и проч. предложеннаго числа Возмемъ для примѣра число 3624.

Это число можно разложить такъ: $3000+600+20+4$.

$$
\begin{aligned}
\text{Но } 3000 &= 999 \times 3 + 3 \\
600 &= 198 \times 3 + 6 \\
20 &= 6 \times 3 + 2 \\
4 &= 4
\end{aligned}
$$

Отсюда число $3624=(999\times3+198\times3+6\times3)+(3+6+2+4)$.

Здѣсь число 3624 разложено на двѣ части, изъ которыхъ всѣ числа, составляющія первую часть, дѣлятся безъ остатка на 3, потому что число 3 входитъ въ каждое множителемъ; слѣдственно, и вся первая часть должна дѣлиться на 3. Вторая же часть состоитъ изъ суммы остатковъ, выраженныхъ тѣми же цифрами, какими изображено самое число 3624. Если бъ въ разложенномъ такимъ образомъ числѣ, сумма остатковъ также дѣлилась на-цѣло на 3, то конечно и все число дѣлилось бы на 3. Но мы замѣтили уже, что сумма остатковъ равна суммѣ цифръ, составляющихъ самое число; слѣдственно, легко заключить, что если сумма цифръ,

изображающихъ какое-либо число, дѣлится безъ остатка на три, то и все число должно дѣлиться на три.

Примѣръ. Пусть требуется узнать, дѣлится ли число 1392 на 3 безъ остатка.

Разложите данное число такъ, какъ было показано выше.

$$\begin{aligned} 1392 &= 1000 + 300 + 90 + 2 \\ 1000 &= 333 \times 3 + 1 \\ 300 &= 99 \times 3 + 3 \\ 90 &= 27 \times 3 + 9 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

$$1392 = (333 \times 3 + 99 \times 3 + 27 \times 3) + (1 + 3 + 9 + 2)$$

Первая часть разложеннаго числа дѣлится на 3 безъ остатка; слѣдственно, все число тогда раздѣлится на 3 безъ остатка, когда сумма остатковъ, или все тоже, сумма цифръ, изображающихъ самое число, раздѣлится на 3 безъ остатка. Но сумма цифръ даннаго числа (1392) есть 15 и дѣлится нацѣло на 3; значитъ и все число дѣлится.

Примѣръ.

$$\begin{array}{r|l} & \overset{3}{\smile} \\ 345 & 115 \\ \hline 1791 & 597 \end{array}$$

4. Всякое число, болѣе 100, дѣлится на 4 безъ остатка, если первые два знака его съ правой стороны, то есть, десятки и единицы, дѣлятся на 4; ибо всякое число можно разложить на двѣ части, изъ которыхъ въ одной были бы только десятки и единицы, а въ другой сотни, тысячи и проч. Но каждая сотня дѣлится на 4 безъ остатка; слѣд-

ственно, и каждое число сотенъ, тысячъ и проч. дѣлится также на-цѣло на 4. Отсюда заключаемъ, чтобъ все число могло раздѣлиться на 4, надобно только, чтобъ его десятки и единицы дѣлились на 4.

Примѣръ. Число 13268 дѣлится на 4, потому что десятки и единицы его (68) дѣлятся на 4 безъ остатка. Число 13268 можно разложить такъ:

$$13268 = 13200 + 68.$$

Если сотня дѣлится на-цѣло на 4, то и 132 сотни также раздѣлятся на 4; кромѣ того 68 дѣлится на 4; поэтому и все число дѣлится.

Примѣръ.

4
536|134
740|185

5. Если число составлено только изъ *пятковъ*, то есть, имѣетъ на концѣ цифру 0 или 5, то оно всегда должно дѣлиться на 5 безъ остатка.

Примѣръ.

5
1580|316
2405|481

6. Число раздѣлится на 6, когда оно раздѣлится на 2 и на 3, ибо $6 = 2 \times 3$ Но число дѣлится безъ остатка на 3, когда сумма цифръ его дѣлится на 3, а на 2, когда послѣдняя цифра его есть четная или нуль; поэтому, если оба эти условія имѣютъ мѣсто, то число раздѣлится безъ остатка и на 6.

Примѣръ.

6
648|108
906|151

7. Всякое число, более 1000, дѣлится безъ остатка на 8, когда сумма сотенъ, десятковъ и единицъ его дѣлится безъ остатка на 8; потому что въ такомъ случаѣ данное число можно разложить на одну или нѣсколько тысячъ и еще на сотни, десятки и единицы. Число 8 содержится въ 1000 равно 125 разъ, поэтому оно должно заключаться и въ каждомъ числѣ тысячъ безъ остатка; въ сотняхъ же, десяткахъ и единицахъ оно по условію содержится безъ остатка; значитъ, что и во всемъ числѣ оно должно содержаться безъ остатка.

Примѣръ.

	8
32376	4047
87512	10939

8. Всякое число дѣлится на 9 безъ остатка, если сумма всѣхъ цифръ, его изображающихъ, дѣлится на 9 безъ остатка. Это доказывается подобнымъ образомъ, какъ и дѣлимость чиселъ на 3.

Примѣръ.

	9
2178	242
4689	521

9. На 10 дѣлятся всѣ числа, въ которыхъ на мѣстѣ единицъ стоитъ 0. Отсюда, на 100 дѣлятся тѣ числа, которыя имѣютъ на концѣ два нуля, на 1000—три нуля, и т. д.

Примѣры.

	10			1000
640	64		2000	2
890	89		3000	3

10. Чтобы число могло раздѣлиться безъ остатка на 12, надобно чтобъ оно дѣлилось и на 3, и на 4,

потому что 12 = 3 × 4. Итакъ, если сумма цифръ его дѣлится на 3, а сумма десятковъ и единицъ на 4, то оно раздѣлится и на 12.

Примѣръ.

$$\begin{array}{r|l} & \overbrace{\quad}^{12} \\ 28824 & 2402 \\ \hline 36132 & 3011 \end{array}$$

11. Число дѣлится на 15, когда послѣдняя цифра его есть 0 или 5, а сумма цифръ дѣлится на 3; потому что 15 = 5 × 3.

Примѣръ.

$$\begin{array}{r|l} & \overbrace{\quad}^{15} \\ 195 & 13 \\ \hline 480 & 32 \end{array}$$

Примѣчаніе. Такихъ признаковъ дѣлимости чиселъ много; но они съ большею отчетливостію выводятся только изъ общихъ свойствъ чиселъ, доказываемыхъ посредствомъ Алгебры. Въ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ, относительно различныхъ свойствъ чиселъ, учитель можетъ руководствоваться двумя сочиненіями: 1) Theorie des nombres, Лежандра, и Desquisitiones Arithmeticae, Гаусса.

Способы дѣлимости чиселъ, до-сихъ-поръ нами изложенные, хотя просты и удобны, однакожъ не могутъ быть вполнѣ приложены къ сокращенію дробей, потому что есть много такихъ дробей, которыя, не сокращаясь ни на одно изъ приведенныхъ нами чиселъ, тѣмъ не менѣе сокращаются на большія числа; напр. дробь $^{17}/_{34}$, которая сокращается только на 17. Притомъ эти способы имѣютъ ту невыгоду, что когда члены дроби состоятъ изъ большихъ чиселъ, то трудно бываетъ вообще удостовѣриться, суть ли эти члены *числа первыя между собою*, или нѣтъ. Да кромѣ того, они и весьма

мѐньшее число содержится безъ остатка въ бо̀льшемъ. Во всякомъ другомъ случаѣ онъ долженъ быть менѣе мѐньшаго числа. Поэтому, чтобы найти самаго большаго общаго дѣлителя данныхъ чиселъ, 560 и 276, надобно прежде всего удостовѣриться, чрезъ дѣйствительное дѣленіе, дѣлится ли бо̀льшее изъ нихъ (560) на мѐньшее (276) безъ остатка.

$$560 : 276 = 1$$
$$84$$

Раздѣливъ 560 на 276, получаемъ въ частномъ 1, а въ остаткѣ 84. Въ чемъ это насъ удостовѣряетъ?

Учен. Въ томъ, что самый большой общій дѣлитель долженъ быть менѣе мѐньшаго изъ данныхъ чиселъ.

У. Чему обыкновенно бываетъ равно дѣлимое?

Учен. Произведенію частнаго на дѣлителя, сложенному съ остаткомъ.

У. Слѣдственно, ка̀къ можно изобразить число 560?

Учен. Вотъ такъ: $560 = 276 \times 1 + 84$.

У. Мы нашли, что 560 состоитъ изъ двухъ частей: 276×1 и 84; но намъ извѣстно, что если обѣ части какого-либо разложеннаго числа дѣлятся на другое число безъ остатка, то и все число раздѣлится на это другое безъ остатка; слѣдственно, самый большой общій дѣлитель чиселъ 276×1 и 84, или 276 и 84, будетъ также самымъ большимъ дѣлителемъ и числа 560. Что же надобно сдѣлать теперь, чтобы найти самаго большаго общаго дѣлителя, который не можетъ быть болѣе 84?

медлительны, ибо не даютъ прямо *самаго большаго общаго дѣлителя*, по сокращеніи на котораго обоихъ членовъ дроби, послѣдняя тотчасъ принимаетъ самый простѣйшій видъ, какой она можетъ только принять. Предложимъ теперь этотъ общій способъ *приведенія дробей къ простѣйшему ихъ виду*, и для ясности обратимся снова къ діалогической формѣ изложенія.

У. Требуется найти *самаго бо́льшаго общаго дѣлителя* двухъ чиселъ: 360 и 276. Отыщите сперва нѣсколько общихъ дѣлителей этихъ чиселъ.

Учен. 2, 3, 4, 6 суть общія дѣлители данныхъ чиселъ.

У. Самый большой общій дѣлитель двухъ чиселъ можетъ ли быть болѣе мѐньшаго числа?

Учен. Никогда; потому что въ такомъ случаѣ мѐньшее число не могло бы раздѣлиться на него на-цѣло.

У. Но могутъ ли быть иногда даны два такія числа, мѐньшее изъ которыхъ будетъ также и самымъ большимъ общимъ дѣлителемъ обоихъ?

Учен. Могутъ; напр. числа 16 и 48: здѣсь мѐньшее число (16) есть въ тоже время и самый большой общій дѣлитель обоихъ чиселъ, ибо 48 дѣлится безъ остатка на 16, 16 же на 16 и подавно.

У. Въ какихъ именно числахъ это бываетъ?

Учен. Изъ которыхъ одно есть краткое или частное вразсужденіи другаго.

У. Итакъ, *самый большой общій дѣлитель двухъ чиселъ никогда не можетъ быть болѣе мѐньшаго изъ нихъ, и онъ бываетъ равенъ ему только тогда, когда*

Учен. Попытаться раздѣлить число 276 на 84, и если 84 содержится въ 276 безъ остатка, то это число и будетъ самымъ большимъ общимъ дѣлителемъ данныхъ чиселъ.

У. Дѣлите!

Учен. 276 : 84 = 3
24

Число 84 не есть общій дѣлитель, потому что оно не дѣлитъ 276 безъ остатка.

У. Если число 84 не дѣлитъ безъ остатка 276, то оно не можетъ раздѣлить и 276 × 1 + 84; слѣдственно, оно не можетъ быть общимъ дѣлителемъ 360 и 276. Число 276, какъ дѣлимое, можно представить въ какомъ видѣ?

Учен. 276 = 84 × 3 + 24.

У. Итакъ, самый большой общій дѣлитель 360 и 276 долженъ быть общимъ дѣлителемъ 84×3 и 24. Но для нахожденія общаго дѣлителя 84×3 и 24, достаточно опредѣлить общаго дѣлителя какихъ чиселъ?

Учен. 84 и 24.

У. Почему?

Учен. Если 84 дѣлится на какое-либо число безъ остатка, то и всякое произведеніе изъ 84 должно также раздѣляться на это число; слѣдственно, и 84 × 3.

У. Общій большой дѣлитель 84 и 24 будетъ также бо́льшимъ дѣлителемъ и какого числа?

Учен. 276.

У. Почему?

Учен. Потому что 276 = 3 × 84 + 24.

У. Общій бóльшій дѣлитель трехъ чиселъ: 276, 84 и 24 будетъ также общимъ дѣлителемъ еще какого числа?

Учен. 360; ибо $360 = 276 \times 1 + 84$.

У. Что надобно сдѣлать, чтобы опредѣлить самаго большаго общаго дѣлителя 84 и 24?

Учен. Раздѣлить 84 на 24.

$$84 : 24 = 3$$
$$12$$

У. Что изъ этого дѣленія усматриваете?

Учен. Что самый большой общій дѣлитель 360 и 276 не есть число 24, но менѣе его.

У. Какъ можно выразить 84?

Учен. Чрезъ $24 \times 3 + 12$.

У. На основаніи предыдущихъ разсужденій, не трудно понять, что самый большой общій дѣлитель 24 и 12, будетъ самымъ большимъ общимъ дѣлителемъ $24 \times 3 + 12$, или 84 и 24, также 276 и 84, и наконецъ 360 и 276. Раздѣлите 24 на 12.

Учен. $24 : 12 = 2$

Число 24 дѣлится на 12 безъ остатка.

У. Итакъ, 12 есть *общій* и вмѣстѣ *самый большой дѣлитель* чиселъ 24 и 12.

Но прежде мы доказали, что

1. Самый большой общій дѣлитель 360 и 276 долженъ быть и самымъ большимъ общимъ дѣлителемъ 276 и 84.

2. Самый большой общій дѣлитель 276 и 84 долженъ быть также самымъ большимъ общимъ дѣлителемъ 84 и 24.

3. Самый большой общій дѣлитель 84 и 24 долженъ быть и самымъ большимъ общимъ дѣлителемъ 24 и 12.

Но самый большой общій дѣлитель 24 и 12 есть 12; поэтому 12 есть также самый большой общій дѣлитель 360 и 276.

На практикѣ дѣйствіе обыкновенно располагается слѣдующимъ образомъ:

$$360 : 276 = 1$$
$$276 : 84 = 3$$
$$84 : 24 = 3$$
$$\underline{24} : 12 = 2$$
$$0$$

Общее правило. Чтобы найти самаго большаго общаго дѣлителя какихъ-либо двухъ данныхъ чиселъ, надобно бо́льшее изъ нихъ раздѣлить на мѐньшее, и если въ дѣленіи не получится остатка, то мѐньшее число и будетъ искомымъ дѣлителемъ. Если же произойдетъ въ дѣленіи остатокъ, то дѣлится мѐньшее число на этотъ первый остатокъ. Полученный остатокъ въ томъ только случаѣ будетъ самымъ большимъ общимъ дѣлителемъ, когда онъ содержится равное число разъ въ мѐньшемъ числѣ; въ противномъ случаѣ, должно продолжать дѣленіе перваго остатка на второй, втораго на третій и такъ далѣе до тѣхъ поръ, пока дѣлимое раздѣлится наконецъ точнымъ образомъ: тогда послѣдній остатокъ и будетъ самымъ большимъ общимъ дѣлителемъ двухъ данныхъ чиселъ.

Примѣнивъ дѣйствіе отысканія самаго большаго общаго дѣлителя къ двумъ членамъ дроби, и получивъ такимъ образомъ самое большое число, на

которое оба эти члена раздѣляются безъ остатка, если потомъ дѣйствительно раздѣлимъ ихъ на это найденное число, то и получимъ дробь въ самомъ простѣйшемъ видѣ.

Примѣръ. Привести къ простѣйшему виду дробь $\frac{592}{999}$.

Рѣшеніе.

$$999 : 592 = 1$$
$$592 : 407 = 1$$
$$407 : 185 = 2$$
$$\frac{185}{0} : 37 = 5$$

Итакъ, самый большой общій дѣлитель обоихъ членовъ предложенной дроби есть 37. Раздѣливъ же на него оба члена дроби, получимъ:

$$\frac{592}{999}\Big|\overset{37}{\frac{16}{27}} \qquad \left\{\begin{array}{l} 592 : 37 = 16 \\ \frac{222}{\;\;0} \\ 999 : 37 = 27 \\ \frac{259}{\;\;0} \end{array}\right.$$

Примѣръ 2. Сократить дробь $\frac{108}{480}$.

Рѣшеніе.

$$480 : 108 = 4$$
$$108 : 48 = 2$$
$$\frac{48}{0} : 12 = 4$$

$$\frac{108}{480}\Big|\overset{12}{\frac{9}{40}}$$

Примѣръ 3. Привести дробь $\frac{912}{3072}$ *къ простѣйшему ея виду.*

$$5072 : 912 = 5$$
$$912 : 536 = 2$$
$$536 : 240 = 1$$
$$240 : 96 = 2$$
$$\frac{96}{0} : 48 = 2$$

$$\begin{array}{r|l} & \overset{48}{\overline{19}} \\ 912 & \\ \hline 3072 & 64 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 912 : 48 = 19 \\ \underline{432} \\ \quad 0 \\ 3072 : 48 = 64 \\ \underline{192} \\ \quad 0 \end{array} \right.$$

Если въ послѣдовательномъ дѣленіи, которое употребляется при нахожденіи самаго большаго дѣлителя двухъ чиселъ, послѣдній дѣлитель выйдетъ равенъ 1, *то это явный знакъ, что оба предложенныя числа суть первыя между собою, потому что не имѣютъ другаго общаго дѣлителя кромѣ единицы.*

Обратно, если оба раздѣляемыя числа суть первыя между собою, то въ послѣдовательномъ дѣленіи необходимо послѣдній остатокъ будетъ равенъ 1. *Ибо, по свойству самаго дѣйствія видно, что остатки все болѣе и болѣе уменьшаются, такъ что послѣдній изъ нихъ долженъ быть или* 0 *или* 1; *но если выходитъ нуль, то значитъ, что предпослѣдній остатокъ въ послѣднемъ содержится равное число разъ, и въ такомъ случаѣ данныя числа имѣютъ общаго дѣлителя; поэтому послѣдній остатокъ* 1 *соотвѣтствуетъ тому случаю, когда данныя числа суть первыя между собою.*

Возмемъ еще, для примѣра, дробь $^{317}/_{873}$.

$$873 : 317 = 2$$
$$317 : 239 = 1$$
$$239 : 78 = 3$$

78 : 5 = 15
5 : 3 = 1
3 : 2 = 1
1

Здѣсь послѣднiй остатокъ равенъ 1; значитъ, что 875 и 317 суть *числа первыя между собою*, а самая дробь $^{317}/_{875}$ есть *несократимая*.

Примѣчанiе. При третьемъ изъ послѣдовательныхъ дѣленiй, полученъ остатокъ 5, который есть *число первое*; но какъ 5 не дѣлитъ предыдущаго остатка (78) на-цѣло, то мы имѣемъ право полагать, прекращая дѣленiе, что предложенныя числа суть первыя между собою. Дѣйствительно, изъ общаго хода дѣйствiя видно, что самый большой общiй дѣлитель 2 чиселъ необходимо раздѣлитъ остатокъ отъ каждаго дѣленiя на-цѣло. Итакъ, если 5 есть число первое, то могутъ быть два случая: или 5 раздѣлитъ предыдущiй остатокъ на-цѣло, и тогда эта цифра есть самый большой общiй дѣлитель, или не раздѣлитъ его, и въ такомъ случаѣ для двухъ данныхъ чиселъ не можетъ быть общимъ дѣлителемъ ни 5, ни другое какое-либо число, кромѣ 1.

Вообще, *если въ послѣдовательномъ дѣленiи получается, наконецъ, остатокъ, который, будучи первымъ числомъ, не дѣлитъ на-цѣло предыдущаго остатка, то оба данныя числа необходимо суть первыя между собою, и нѣтъ уже нужды продолжать дѣйствiя.*

№ 51. ТРЕТІЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Приведеніе дробей къ одинакому знаменателю.

Въ бо̀льшей части ариѳметическихъ книгъ, при приведеніи дробей къ одинакому знаменателю, обыкновенно ссылаются на общее правило, т. е. что *общій знаменатель двухъ или нѣсколькихъ дробей отыскивается чрезъ умноженіе всѣхъ частныхъ знаменателей*, тогда какъ на практикѣ правило это очевидно имѣетъ мѣсто въ томъ только случаѣ, когда всѣ частные знаменатели суть *первыя между собою* числа. Случай весьма рѣдкій. Отъ того и выходитъ, что ученики, затвердивъ наизусть помянутое правило, такъ чуждаются потомъ всякихъ сокращенныхъ выкладокъ, такъ бываютъ не ловки и не точны въ своихъ исчисленіяхъ, и часто не умѣютъ справиться съ самою пустою задачею. Всегда надобно помнить, что сила рѣшенія задачи заключается въ сокращеніи дѣйствія. Если вашему ученику не назначено судьбою пользоваться высшимъ образованіемъ, пріучивъ его съ раннихъ лѣтъ къ самымъ сокращеннымъ выкладкамъ, вы, по крайней мѣрѣ, образуете изъ него хорошаго практика; если же, напротивъ, онъ долженъ пройти полный курсъ математическихъ наукъ, то этотъ зародышъ, который вы въ него вложите, принесетъ ему современемъ богатые плоды: ученикъ привыкнетъ изъ-далеко уже смотрѣть на Алгебру, какъ на символъ краткости.

Для соблюденія постепенности, которую мы приняли за основаніе всей нашей книги, изложимъ

сначала нѣкоторыя, предварительныя правила, которыхъ надлежитъ придерживаться при приведенiи дробей къ одинакому знаменателю.

Правило 1. *Если два неравныя числа, не будучи первыми между собою, разложатся на факторы, изъ которыхъ одинъ есть общiй обоимъ, и потомъ бо̀льшее изъ чиселъ помножится на того фактора мѐньшаго числа, который не содержится въ немъ безъ остатка: то полученное такимъ образомъ произведенiе всегда дѣлится безъ остатка на мѐньшее число.*

Доказательство. Пусть даны два числа: 14 и 20. Разложивъ ихъ на факторы, изъ которыхъ одинъ есть общiй, получаемъ:

$$14 = 2 \times 7$$
$$20 = 2 \times 10$$

Если 20 помножить на 7, то произведенiе 20×7 или 140 должно раздѣлиться безъ остатка на число 14. Это очевидно, потому что въ такомъ случаѣ и полученное произведенiе и мѐньшее изъ данныхъ чиселъ будутъ включать въ себѣ одинакихъ множителей.

$$140 = 7 \times 2 \times 10$$
$$14 = 7 \times 2$$

Но $7 \times 2 \times 10$ всегда дѣлится безъ остатка на 7×2, ибо здѣсь дѣлимое составлено изъ дѣлителя, повтореннаго точное число разъ. — Тоже разсужденiе легко приложить и ко всякимъ другимъ числамъ.

Правило 2. *Если изъ двухъ неравныхъ чиселъ, которыя не суть первыя между собою, каждое разлагается на два фактора, изъ которыхъ оба содержатся въ бо̀льшемъ числѣ безъ остатка и одинъ есть общiй обоимъ числамъ,*

то такимъ же образомъ произведенiе изъ большаго числа на необщаго фактора меньшаго числа, должно дѣлиться безъ остатка на это мѐньшее число.

Пусть даны числа 24 и 18.

Доказательство.

$$24 = 4 \times 6$$
$$18 = 3 \times 6$$

Произведенiе 24×3 или 72 раздѣлится безъ остатка на 18, потому что въ оба данныя числа входятъ общiе множители: $72 = 3 \times 4 \times 6$, $18 = 3 \times 6$.

Примѣчанiе. При раздробленiи чиселъ на факторы всегда надобно имѣть въ виду, чтобъ общiй факторъ былъ сколько возможно бо̀льшимъ числомъ, ибо въ такомъ случаѣ получаемое произведенiе будетъ выражать по возможности мѐньшее число. Числа 24 и 18 можно разложить и такъ: $24 = 2 \times 12$, $18 = 2 \times 9$; но здѣсь произведенiе изъ 24 на 9, или 216 и подавно раздѣлитъ число 18, ибо оно есть кратное вразсужденiи 72; $216 = 72 \times 3$.

Что сказано о двухъ числахъ, тоже можно сказать о трехъ, четырехъ, и т. д.

Теперь изложимъ правила приведенiя дробей къ одинакому знаменателю.

Это преобразованiе имѣетъ цѣлiю, двѣ или болѣе разнородныхъ дробей приводить въ однородныя. Оно основывается на томъ замѣчанiи, прежде нами выведенномъ, что дробь не измѣняетъ своего значенiя, если оба ея члена раздѣлятся на одно и тоже число. Но, приводя дроби къ одинакому знаменателю, важнѣе всего стараться о томъ, чтобы общiй знаменатель былъ выраженъ сколько возможно малымъ числомъ. Вслѣдствiи этого, разсмотримъ

здѣсь три случая, а именно: 1) когда знаменатели данныхъ дробей находятся въ такомъ между собою отношеніи, что бо̀льшій изъ нихъ содержитъ въ себѣ всѣхъ прочихъ безъ остатка; 2) когда бо̀льшій знаменатель не содержитъ въ себѣ безъ остатка всѣхъ прочихъ, однакожъ данные знаменатели не суть между собою первыя числа, и 3) когда они суть числа первыя между собою.

1. *Случай. Если въ данныхъ дробяхъ бо̀льшій знаменатель есть въ тоже время и кратное число вразсужденіи всѣхъ прочихъ, то онъ будетъ и общимъ*

Примѣръ. Требуется привести къ одинакому знаменателю слѣдующія дроби: $^5/_6$, $^3/_8$, $^2/_3$, $^{17}/_{24}$.

Здѣсь бо̀льшій знаменатель (24) есть *кратное* число вразсужденіи всѣхъ прочихъ (6, 8, 3). Раздѣляя послѣдовательно число 24 на 6, 8, 3, получаемъ множителей: для первой дроби 4, для второй 3, а для третьей 8. Если помножимъ числителя и знаменателя первой дроби на 4, числителя и знаменателя второй на 3, а числителя и знаменателя третьей на 8, то и получимъ дроби, выраженныя въ 24 доляхъ.

Дѣйствіе располагается такъ:

$$^5/_6 = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = {^{20}/_{24}}$$

$$^3/_8 = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} = {^9/_{24}}$$

$$^2/_3 = \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = {^{16}/_{24}}$$

$$^{17}/_{24} \qquad = {^{17}/_{24}}$$

Или проще:

	24	
$\frac{5}{6}$	4	20
$\frac{3}{8}$	3	9
$\frac{2}{3}$	8	16
$\frac{17}{24}$	1	17

Изъясненіе. Данныя дроби пишутся въ одной вертикальной строкѣ, а за ними, съ правой стороны за чертою, соотвѣтственные каждой множители; общій же знаменатель помѣщается вверху, надъ чертою Для нахожденія множителя для каждой отдѣльной дроби, общаго знаменателя (который здѣсь есть самый бо̀льшій изъ данныхъ) дѣлятъ послѣдовательно на частныхъ знаменателей: каждое частное показываетъ множителя той дроби, на знаменателя которой произведено дѣленіе. Когда всѣ множители такимъ образомъ отысканы, то помножаютъ ихъ по порядку на соотвѣтственнаго каждому числителя, и произведенія пишутъ въ третій вертикальный рядъ съ правой стороны: эти произведенія и суть числители преобразованныхъ дробей, выражающихъ двадцать-четвертыя части. Общій знаменатель потому не пишется подъ каждымъ изъ числителей, что онъ, находясь на верху, тотчасъ показываетъ ка̀къ должно читать полученныя произведенія.

2. *Случай. Если знаменатели данныхъ дробей не суть частныя вразсужденіи одного изъ нихъ, но не суть и первыя числа между собою, то вмѣсто общаго знаменателя берутъ произведеніе, составленное изъ бо̀льшаго знаменателя, и выраженное по возможности малымъ числомъ, въ которомъ бы однакожъ всѣ прочіе знаменатели содержались безъ остатка*

Примѣръ. Найти общаго знаменателя дробей: $^{17}/_{36}$, $^{5}/_{8}$, $^{11}/_{24}$, $^{3}/_{10}$

Здѣсь самый большой знаменатель есть 36; хотя знаменатель второй дроби (8) не содержится въ немъ безъ остатка, однакожъ его можно разло-

жить на двухъ сомножителей, а именно: $8 = 2 \times 4$, изъ которыхъ каждый дѣлитъ на цѣло число 36. Въ такомъ случаѣ, достаточно число 36 помножить на меньшаго сомножителя, т. е. на 2, чтобы получить общаго знаменателя двухъ дробей $\frac{17}{36}$ и $\frac{5}{8}$. Сравнивая теперь полученное произведеніе (72) съ третьимъ знаменателемъ (24), находимъ, что послѣдній въ 72 содержится безъ остатка; слѣдовательно, 24 не должно входить множителемъ въ составляемое произведеніе, потому что 24 доли равно втрое крупнѣе 72 долей. Итакъ, число 72 можетъ служить общимъ знаменателемъ трехъ дробей: $\frac{17}{36}$, $\frac{5}{8}$ и $\frac{11}{24}$. Наконецъ, послѣдняго знаменателя (10) можно разложить на 2×5, но 2 дѣлитъ на-цѣло 72, поэтому 72 умножимъ только на 5. Число 72×5, или 360 есть общій знаменатель всѣхъ дробей, потому что всѣ частные знаменатели содержатся въ немъ безъ остатка. Такимъ путемъ достигаютъ самаго малаго общаго знаменателя, по отысканіи котораго поступаютъ такъ, какъ было показано въ первомъ случаѣ.

3. *Случай. Если знаменатели данныхъ дробей суть первыя между собою числа, то общій знаменатель получается чрезъ перемноженіе всѣхъ частныхъ знаменателей.*

При этомъ случаѣ нѣтъ возможности отыскать общаго знаменателя, который бы былъ менѣе произведенія, составленнаго изъ всѣхъ частныхъ знаменателей.

Примѣчаніе 1. Изъ предложеннаго способа находить общаго знаменателя, преподающій легко усмотритъ, что важнѣе всего обращать постоянное вниманіе учениковъ на

взаимныя отношенія знаменателей: тогда ученики безъ затрудненія отыщутъ самаго мѐньшаго общаго знаменателя.

Примѣчаніе 2. Не должно отдѣльно отъ сложенія, вычитанія и дѣленія упражнять учениковъ въ приведеніи дробей къ одинакому знаменателю. Объяснивъ имъ, ка̀къ приводятся разнородныя дроби въ однородныя, тотчасъ должно перейти къ четыремъ основнымъ дѣйствіямъ надъ дробными числами.

N° 52. ЧЕТВЕРТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Сложеніе дробей.

Если дроби имѣютъ разныхъ знаменателей, то прежде дѣйствительнаго сложенія надлежитъ привести ихъ въ однородныя, и потòмъ поступать такъ, какъ показано было въ Первой Степени; поэтому все дѣло состоитъ теперь въ одной практикѣ, къ которой прямо и обращаемся.

a. *Найти сумму двухъ дробей:* $^5/_9 + ^{17}/_{30}$

Рѣшеніе. Здѣсь общій знаменатель есть 90; потому что $9 = 3 \times 3$, $30 = 10 \times 3$; но $30 \times 3 = 90$.

	90	
$\frac{5}{9}$	10	50
$\frac{17}{30}$	3	51
$\frac{101}{90} = 1\frac{11}{90}$		

Изъясненіе. По отысканіи общаго знаменателя (90), находятъ сумму соотвѣтствующихъ ему числителей (50 и 51), и подъ нею подписываютъ найденнаго общаго знаменателя. Итакъ, дробь $\frac{101}{90}$ есть искомая сумма данныхъ дробей. Но эта дробь неправильная, и потому, раздѣливъ ея числителя на знаменателя, получимъ вмѣсто ея смѣшанное число $1\frac{11}{90}$.

Дѣйствіе располагаютъ и такъ:

$$\frac{5}{9} + \frac{17}{30} = \frac{150+153}{270} = \frac{303}{270} = 1\,\frac{33}{270}\Big|\overset{3}{\frac{11}{90}}$$

Изъясненіе. Слагаютъ два произведенія, (изъ которыхъ одно получается черезъ умноженіе числителя первой дроби на знаменателя второй, а второе черезъ умноженіе числителя второй дроби на знаменателя первой), и подъ суммою ихъ подписываютъ общаго знаменателя, получаемаго въ произведеніи частныхъ знаменателей; остальное дѣлается, какъ прежде.

Подъ этою формою предыдущій примѣръ кратче можно рѣшить такъ:

$$\frac{5}{9} \overset{90}{\smile}\!\!+ \frac{17}{30} = \frac{50+51}{90} = \frac{101}{90} = 1\,\frac{11}{90}.$$

Изъясненіе. Находятъ самаго мéньшаго общаго знаменателя, здѣсь 90, (См. 2 случай № 51) и пишутъ его надъ знакомъ сложенія; потомъ числителя первой дроби (5) помножаютъ на частное (10), происходящее отъ раздѣленія общаго знаменателя на знаменателя той же дроби, а числителя второй дроби (17) на частное (3), происходящее отъ раздѣленія того же общаго знаменателя на знаменателя второй дроби, и, сложивъ оба произведенія, подписываютъ подъ суммою общаго знаменателя (90).

b. *Какое получится число, если къ тремъ четвертямъ* 195 *прибавимъ двѣ трети* 100 *и три осьмыя* 41?

Рѣшеніе. $^1/_4$ числа 195$=^{195}/_4$, $^3/_4$ 195$=\frac{3\times195}{4}=$ $^{585}/_4 = 146\ ^1/_4$; $^1/_3$ числа 100 $= ^{100}/_3$, $^2/_3$ 100 $= \frac{2\times100}{3}=^{200}/_3=66\ ^2/_3$; $^1/_8$ числа 41$=^{41}/_8$ $^3/_8$ 41$=\frac{3\times41}{8}$ $=^{123}/_8=15\ ^3/_8$ Поэтому требуется сложить слѣдующія числа: 146 $^1/_4$, 66 $^2/_3$ и 15 $^3/_8$.

		24	
146	$\frac{1}{4}$	6	6
66	$\frac{2}{3}$	8	16
15	$\frac{3}{8}$	3	9
$227 + \frac{31}{24} = 228\frac{7}{24}$.			

Изъясненіе. Числа подписываются одно подъ другимъ такъ, чтобы цѣлыя стояли подъ цѣлыми, а дроби подъ дробями, внизу проводится поперечная черта, подъ которою пишется и сумма цѣлыхъ и сумма дробей: наконецъ соединяются обѣ суммы въ одну.

Примѣненія. Нѣкто мѣшаетъ $6\frac{3}{4}$ фунтовъ воды съ $7\frac{11}{12}$ фунтами крѣпкаго уксусу. Сколько фунтовъ составитъ ч. смѣсь? — $\frac{1}{4} + \frac{7}{8} + \frac{5}{16} + \frac{7}{32} = ?$ — Найти сумму слѣдующихъ чиселъ: $126\frac{5}{6} + 457\frac{1}{9} + 3434\frac{4}{5} + 3459\frac{4}{5} + 7543\frac{1}{2} + 1658\frac{3}{8}$. Чему будетъ равна сумма трехъ чиселъ, изъ которыхъ одно есть $14\frac{11}{17}$, другое болѣе перваго на $9\frac{15}{20}$, а третіе болѣе втораго на $5\frac{3}{7}$? —

№ 53. ПЯТѲЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Вычитаніе дробей.

И здѣсь, какъ въ предыдущемъ упражненіи, все дѣло состоитъ въ практикѣ.

a. *Вычитаніе дроби изъ цѣлаго числа.*

$$16 - \frac{1}{17} = ?$$

Рѣшеніе: $16 - \frac{1}{17} = 15\frac{17}{17} - \frac{1}{17} = 15\frac{16}{17}$.

b. *Вычитаніе дроби изъ дроби.*

1. *Найти разность между $\frac{7}{9}$ и $\frac{5}{8}$.*

Рѣшеніе. Чтобы узнать, которая изъ двухъ дробей съ разными знаменателями болѣе, надобно привести ихъ къ одинакому знаменателю.

	72	
$\frac{7}{9}$	9	56
$\frac{5}{8}$	8	45
$\frac{11}{72}$		

Изъясненіе. Здѣсь все различіе отъ сложенія состоитъ въ томъ, что числитель меньшей изъ преобразованныхъ въ одинакія части дробей вычитается изъ числителя бо́льшей, и подъ полученною разностью подписывается, какъ и въ сложеніи, общій знаменатель.

Тоже другимъ образомъ:

$^7/_9 - ^5/_8 = \frac{56-45}{72} = ^{11}/_{72}$.

Примѣч. Вообще этотъ способъ предпочтительнѣе употреблять тогда, когда знаменатели данныхъ дробей суть первыя между собою числа.

c. Если дробь вычитаемаго числа болѣе дроби, находящейся при уменьшаемомъ числѣ, то чтобъ можно было произвести вычитаніе, необходимо отъ цѣлаго числа взять единицу, и, обративъ её въ тѣ же части, какія выражаются мѣньшею дробью, прибавить её къ послѣдней.

1. *Пусть требуется изъ* $3^2/_7$ *вычесть* $1^5/_6$.

Рѣшеніе.

		42	
3	$\frac{2}{7}$	6	12+42=54
1	$\frac{5}{6}$	7	35
1 +			$^{19}/_{42} = 1^{19}/_{42}$

Изъясненіе. По приведеніи данныхъ дробей къ одинакому знаменателю, тотчасъ видимъ, что $\frac{5}{6}$ болѣе $\frac{2}{7}$, ибо $\frac{5}{6} = \frac{35}{42}$, а $\frac{2}{7} = \frac{12}{42}$. Слѣдственно, чтобъ можно было произвести вычитаніе, занимаютъ у цѣлаго, находящагося въ уменьшаемомъ, единицу (а надъ цѣлымъ ставятъ точку для показанія, что его должно теперь читать единицею менѣе противъ прежняго), превращаютъ её въ 42 доли, и прилагаютъ послѣднія къ 12 сорокъ-вторымъ, что и составитъ всего 54 сорокъ-вторыя. Изъ $\frac{54}{42}$ вычитаютъ $\frac{35}{42}$, и за чертою пишутъ остатокъ $\frac{19}{42}$; наконецъ, остатокъ отъ дробей соединяютъ съ остаткомъ отъ цѣлыхъ чисель, и получаютъ всего $1\frac{19}{42}$.

d. *Сложныя задачи.*

1. *Какія получатся остатки, если отъ дроби $^7/_8$ станемъ отнимать: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{10}$, $^1/_{11}$ и т. д.?*

Отв. $^7/_8-^1/_2=^3/_8$; $^7/_8-^1/_3=^{13}/_{24}$, и проч.

2. Сложить $146^2/_3+487^5/_6+342^7/_9+1864^7/_{12}$, и изъ суммы вычесть: $122^1/_2+345^7/_8+116^2/_5+314^5/_7$.

Исчисленіе.

	36	
$146\frac{2}{3}$	12	24
$487\frac{5}{6}$	6	30
$342\frac{7}{9}$	4	28
$1864\frac{7}{12}$	3	21
$2841\frac{31}{36}$		$^{103}/_{36}=2\,^{31}/_{36}$

	280	
$122\frac{1}{2}$	140	140
$345\frac{7}{8}$	35	245
$116\frac{2}{5}$	56	112
$314\frac{5}{7}$	40	200
$899\frac{137}{280}$		$^{697}/_{280}=2\,^{137}/_{280}$

	2520	
$2841\frac{31}{36}$	70	2170
$799\frac{137}{280}$	9	1233
$2042\frac{937}{2520}$		$^{937}/_{2520}$

№ 54. ШЕСТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Умноженіе дробей.

Мы знаемъ уже изъ Первой Степени какъ должно читать выраженія, подобныя слѣдующимъ: $7\times{}^2/_3$, $^5/_{11}\times 9$, $^2/_3\times{}^8/_9$, $5^3/_7\times 4^3/_4$, и т. д.; остается вывести общія правила, которыми обыкновенно руководствуются при умноженіи дробей.

a. *Если цѣлое число помножается на дробь, то числитель данной дроби берется столько разъ, сколько единицъ въ цѣломъ, и подъ произведеніемъ подписывается знаменатель той же дроби.*

Примѣръ. $27 \times {}^{16}/_{19}$.

Рѣшеніе. $27 \times {}^{16}/_{19} = \frac{27 \times 16}{19} = {}^{432}/_{19} = 22\,{}^{14}/_{19}$.

27 умножить на $^{16}/_{19}$ тоже значитъ, что дробь $^{16}/_{19}$ увеличить въ 27 разъ, а дробь увеличивается въ 27 разъ тогда, когда, при томъ же знаменателѣ, числитель ея увеличивается въ 27 разъ.

b. *Чтобы смѣшанное число умножить на цѣлое, надобно сперва привести его въ неправильную дробь, и потомъ поступать, какъ показано въ а. Или: цѣлое умножить на цѣлое, потомъ дробь на цѣлое, и оба произведенія сложить. Тоже и обратно.*

Примѣръ. Чему равно $215\,{}^{17}/_{24} \times 146$?

Первое рѣшеніе.

$215\,{}^{17}/_{24} \times 146 = \frac{5177}{24} \times 146 = \frac{755842}{24} = 31493\,{}^{5}/_{12}$.

Второе рѣшеніе.

$215\,{}^{17}/_{24} \times 146 = 215 \times 146 + {}^{17}/_{24} \times 146 = 31390 + 103\,{}^{10}/_{24} = 31493\,{}^{5}/_{12}$.

c. *При умноженіи дроби на дробь, произведеніе изъ числителей дѣлится на произведеніе изъ знаменателей. Если въ частномъ получится неправильная дробь, въ такомъ случаѣ отдѣляютъ отъ нея цѣлое число.*

Дѣйствительно, что значитъ, напримѣръ, $^{5}/_{7} \times {}^{2}/_{3}$? взять 5 разъ *седьмую часть* отъ дроби $^{2}/_{3}$; но $^{1}/_{7}$ отъ $^{2}/_{3} = \frac{2}{3 \times 7}$, ибо чтобъ получить $^{1}/_{7}$ дроби $^{2}/_{3}$ надобно послѣднюю уменьшить въ 7 разъ, или все

тоже, умножить знаменателя ея на 7. Если $^1/_7$ дроби $^2/_3 = \frac{2}{3 \times 7}$, то $^5/_7$ дроби $^2/_3$ должны быть въ 5 разъ болѣе выраженія $\frac{2}{3 \times 7}$ или $\frac{5 \times 2}{3 \times 7}$, т. е. $^{10}/_{21}$. Отсюда и слѣдуетъ, что *при умноженіи дроби на дроби, произведеніе изъ ихъ числителей дѣлится на произведеніе изъ ихъ знаменателей.*

d. *При умноженіи смѣшаннаго числа на смѣшанное, оба числа приводятъ сперва въ неправильныя дроби, и потомъ поступаютъ такъ, какъ показано въ* c.

Примѣръ. Сколько составитъ $75^7/_{12} \times 4^{11}/_{25}$?

Исчисленіе.

$$75^7/_{12} \times 4^{11}/_{25} = {}^{907}/_{12} \times {}^{111}/_{25} = \frac{100677}{300} = 335\ ^{177}/_{300}$$

1) $75\ ^7/_{12} = {}^{907}/_{12}$: $\times 75$, $= 900$, $+7$, $= 907$

2) $4\ ^{11}/_{25} = {}^{111}/_{25}$: $\times 4$, $= 100$, $+11$, $= 111$

3) 907×111: 907, 907, 907, $= 100677$

4) $12 \times 25 = 300$

5) $1006{,}77 : 3{,}00 = 335\ ^{177}/_{300}$

Различныя сокращенія при умноженіи дробей.

Умноженіе дробей допускаетъ многія сокращенія, которыхъ при самомъ дѣйствіи никогда не должно выпускать изъ виду.

Примѣръ 1. Чему $= {}^5/_8 \times {}^3/_4 \times {}^7/_9 \times {}^4/_5$?

Отв. $^5/_8 \times {}^3/_4 \times {}^7/_9 \times {}^4/_5 = \frac{5 \times 3 \times 7 \times 4}{8 \times 4 \times 9 \times 5} = {}^7/_{24}$. Здѣсь замѣчаемъ, что какъ въ произведеніе числителей,

такъ и въ произведеніе знаменателей входятъ одинакіе множители, а именно: 5, 3, 4; ибо множитель 9 въ произведеніи знаменателей можно выразить такъ: 3×3. Исключеніемъ общихъ множителей изъ обоихъ произведеній нисколько не измѣнимъ отношенія между членами искомой дроби, потому что черезъ это сокращеніе уменьшимъ ихъ въ одинакое число разъ, отъ чего, какъ извѣстно, дробь своего значенія не перемѣняетъ. Итакъ, вмѣсто выраженія: $\frac{5 \times 3 \times 7 \times 4}{8 \times 4 \times 9 \times 5}$ можно взять выраженіе: $\frac{7}{6 \times 5}$, которое равно $7/_{24}$.

Примѣръ 2. Найти произведеніе слѣдующихъ чиселъ: $5/_6$, $3\,4/_5$, $2/_3$, 6, $2\,5/_8$.

Рѣшеніе. $5/_6 \times 3\,4/_5 \times 2/_3 \times 6 \times 2\,5/_8 = \frac{5 \times 19 \times 2 \times 6 \times 21}{6 \times 5 \times 3 \times 1 \times 8} = \frac{5 \times 19 \times 6 \times 2 \times 3 \times 7}{6 \times 5 \times 3 \times 1 \times 2 \times 4} = \frac{19 \times 7}{4} = 133/_4 = 33\,1/_4$.

NB. Здѣсь общіе множители суть: 5, 2, 6, 3, ибо множитель 21, входящій въ произведеніе числителей, и множитель 8, входящій въ произведеніе знаменателей, могутъ быть разложены, первый на 7×3, а второй на 4×2.

Примѣръ 3. Что получится, если $24/_{25}$ умножить на 15?

Рѣш. $24/_{25} \times 15 = \frac{24 \times 15}{25} = \frac{24 \times 3 \times 5}{5 \times 5} = \frac{24 \times 3}{5} = 72/_5 = 14\ 2/_5$.

Примѣръ 4. Чему $= 6\,4/_5 \times 15$?

Рѣш. $6\,4/_5 \times 15 = \frac{34 \times 15}{5} = \frac{34 \times 3 \times 5}{5} = 34 \times 3 = 102$.

Примѣненія. Нѣкто израсходовалъ въ первый разъ $15\frac{3}{4}$ р. $\times\ 20\frac{1}{3}$, во второй разъ $18 \times \frac{5}{16}$ руб., въ третій

разъ $45 \times 10\frac{1}{5}$ р., въ четвертый разъ $25\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ рубля и въ пятый разъ $8\frac{2}{3} \times 50$ руб.; изъ этихъ денегъ четвертую часть онъ самъ заработалъ, а остальныя получилъ по наслѣдству. Какъ велико было его наслѣдство? — Изъ трехъ чиселъ, первое равно $\frac{3}{7}$, второе равно $\frac{5}{7}$ перваго, а третье составляетъ $\frac{5}{7}$ втораго. — Какая перемѣна должна произойти въ произведенiи, если множимое увеличимъ въ $19\frac{5}{7}$ раза, а множителя въ $7\frac{3}{4}$? —

№ 55. СЕДЬМОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Дѣленіе дробей.

Дѣленіе дробей, по крайней мѣрѣ для учениковъ не старѣе 9, 10 лѣтъ, представляетъ не мало затрудненій, зависящихъ въ особенности отъ формы, подъ которою его обыкновенно представляютъ, и потому постараемся подробнѣе изложить это дѣйствіе.

I. *Дѣленіе дроби и смѣшаннаго числа на цѣлое число.*

1. *Если 4 ученикамъ раздѣлить поравно $^1/_2$ руб., то по сколько каждому достанется?*

Отв. По $^1/_8$ руб.; потому, чтобъ узнать, по сколько получитъ каждый, надобно $^1/_2$ раздѣлить на 4, или все тоже, уменьшить $^1/_2$ въ 4 раза; но дробь уменьшится въ 4 раза тогда, когда, при томъ же числителѣ, знаменатель ея увеличится въ 4 раза. Письменно такъ: $^1/_2 : 4 = \frac{1}{2 \times 4} = {}^1/_8$.

2. *По сколько получитъ каждый изъ 5 учениковъ, если на всѣхъ раздѣлить по равной части $^7/_8$ руб.?*

Отв. По $^7/_{40}$ руб., ибо $^7/_8 : 5 = \frac{7}{8 \times 5} = {}^7/_{40}$.

3. $3^2/_3 : 7 = ?$

Отв. $^{11}/_{21}$. Раздѣлить $3^2/_3$ на 7 тоже значить, что и уменьшить число $3^2/_3$ въ 7 разъ; но $3^2/_3 = {}^{11}/_3$; $^1/_3$ уменьшенная въ 7 разъ $= {}^1/_{21}$, а $^{11}/_3$ уменьшенныя въ 7 разъ $= {}^{11}/_{21}$.

Этотъ вопросъ можно еще разрѣшить слѣдующимъ образомъ: такъ какъ дѣлимое $3^2/_3$ менѣе дѣлителя 7, то раздѣлить $3^2/_3$ на 7 тоже, что узнать, какую часть $3^2/_3$ составляютъ отъ 7. Но если 1 составляетъ $^1/_7$ отъ 7, то $^1/_3$, будучи втрое менѣе 1, должна составлять $^1/_{21}$ отъ 7; поэтому $^{11}/_3$, или $3^2/_3$, въ 11 разъ болѣе $^1/_{21}$, или $^{11}/_{21}$.

Здѣсь полезно занимать учениковъ послѣдовательными рядами; напр.

a) Раздѣлить $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$ и т. д. на 2, 3, 4, 5, 6, 7 и т. д.

b) Найти $^1/_3$. $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$ и т. д. отъ $^2/_5$, $^3/_7$, $^8/_9$ и т. д

c) Опредѣлить $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$ и т. д. $2^1/_2$, $3^1/_2$, $4^1/_2$, $5^1/_2$ и т. д.

и проч. и проч.

Изъ приведенныхъ примѣровъ выводимъ правило: *Чтобъ раздѣлить дробь на цѣлое число, надобно знаменателя ея умножить на это цѣлое. При дѣленіи смѣшаннаго числа на цѣлое наблюдается тоже самое, только сперва смѣшанное число приводится въ неправильную дробь.*

Примѣры въ большихъ числахъ.

4. $\frac{1872}{6475} : 52 = ?$

Рѣш. $\frac{1872}{6475} : 52 = \frac{1872}{6475 \times 52} = \frac{1872}{6475 \times 52} \Big| \frac{\overset{52}{36}}{6475}$.

5. *Раздѣлить 68 $^{31}/_{32}$ на 34 равныя части.*

Рѣш. $68\ ^{31}/_{32} : 34 = \frac{68 \times 32 + 31}{32 \times 34} = \frac{2207}{1088} = 2\frac{31}{1088}$.

II. *Дѣленіе цѣлаго числа на дробь или смѣшанное число.*

1. *Сколько разъ $^2/_3$ содержатся въ 4?*

Отв. 6 разъ. Чтобы узнать, сколько разъ $^2/_3$ содержатся въ 4, надобно 4 также привести въ третьи доли; $4 = {}^{12}/_3$. Итакъ, $^2/_3$ содержатся въ 4 столько же разъ, сколько $^2/_3$ въ $^{12}/_3$; но $^2/_3$ содержатся въ $^{12}/_3$ столько же разъ, сколько 2 (числитель дѣлящей дроби) въ 12 (числителѣ дѣлимой дроби), т. е. 6 разъ. Письменно такъ: $4 : {}^2/_3 = {}^{12}/_3 : {}^2/_3 = {}^{12}/_2 = 6$.

2. $12 : {}^5/_7 = ?$

Отв. $^{84}/_5 = 16^4/_5$. Ибо $12 = \frac{12 \times 7}{7} = {}^{84}/_7$; $^{84}/_7 : {}^5/_7 = 84 : 5 = {}^{84}/_5 = 16^4/_5$.

3. *Найти, сколько разъ $3^3/_4$ содержатся въ 18.*

Отв. $^{72}/_{15} = 4^{12}/_{15}$; потому что $18 = \frac{18 \times 4}{4} = {}^{72}/_4$; $3^3/_4 = {}^{15}/_4$. Итакъ, чтобы узнать, сколько разъ $3^3/_4$ содержатся въ 18, надобно $^{72}/_4$ раздѣлить на $^{15}/_4$, или все тоже, 72 на 15.

Отсюда общее правило: *цѣлое число приводится въ однородныя части съ дробью; послѣ чего числитель дѣлимой дроби раздѣляется на числителя дѣлящей. Если же дѣлитель есть смѣшанное число, то прежде надобно привести его въ неправильную дробь, и потомъ поступать какъ сказано.*

Примѣръ въ большихъ числахъ.

4. *Сколько разъ $7^8/_{21}$ содержатся въ 65?*

Отв. $8^{83}/_{155}$.

Рѣш. $7^8/_{21} = {}^{155}/_{21}$; $63 = \frac{63 \times 21}{21} = {}^{1323}/_{21}$; $63 : 7^8/_{21} = {}^{1323}/_{21} : {}^{155}/_{21} = {}^{1323}/_{155} = 8^{83}/_{155}$.

III. *Дѣленіе дроби на дробь, также смѣшаннаго числа на дробь, или обратно.*

1. *Сколько разъ $^1/_3$ содержится въ $^1/_2$, $^2/_3$ въ $^3/_4$, $^5/_6$ въ $^2/_5$?*

Отв. a) $^1/_3 = {}^2/_6$, $^1/_2 = {}^3/_6$; 2 въ 3 содержится $1^1/_2$ раза; поэтому и $^2/_6$ въ $^3/_6$, или $^1/_3$ въ $^1/_2$ тоже содержится $1^1/_2$ раза.

b) $^2/_3 = {}^8/_{12}$; $^3/_4 = {}^9/_{12}$; 8 въ 9 содержится $1^1/_8$ раза; слѣдственно и $^8/_{12}$ въ $^9/_{12}$, или $^2/_3$ въ $^3/_4$ тоже $1^1/_8$ раза.

c) $^5/_6 = {}^{25}/_{30}$; $^2/_5 = {}^{12}/_{30}$; 12 отъ 25 составляютъ $^{12}/_{25}$; поэтому и $^{12}/_{30}$ отъ $^{25}/_{30}$, или $^2/_5$ отъ $^5/_6$ составляютъ тоже $^{12}/_{25}$.

2. *Сколько разъ $^2/_3$ содержатся въ $5^1/_2$?*

Отв. $8^1/_4$; потому что $^2/_3 = {}^4/_6$; $5^1/_2 = {}^{11}/_2 = {}^{33}/_6$; 4 въ 33 содержатся $8^1/_4$ раза, слѣдственно и $^4/_6$ въ $^{33}/_6$, или $^2/_3$ въ $5^1/_2$ тоже $8^1/_4$ раза. Письменно такъ: $5^1/_2 : {}^2/_3 = {}^{11}/_2 : {}^2/_3 = \frac{11 \times 3}{6} : \frac{2 \times 2}{6} = \frac{11 \times 3}{2 \times 2} = {}^{33}/_4 = 8^1/_4$.

3. *Раздѣлить $^2/_3$ на $5^1/_2$.*

Такъ какъ дѣлимое менѣе дѣлителя, то въ частномъ должна произойти дробь. $^2/_3$ раздѣлить на $5^1/_2$ все тоже, что узнать, какую часть $^2/_3$ составляютъ отъ $5^1/_2$. Для этого приводимъ обѣ дроби въ одинакія части. $^2/_3 = {}^4/_6$, $5^1/_2 = {}^{33}/_6$; 4 отъ 33 составляютъ $^4/_{33}$; поэтому и $^2/_3$ отъ $5^1/_2$ тоже $^4/_{33}$.

Общее правило. При раздѣленіи дроби на дробь поступаютъ такъ: сперва приводятъ обѣ дроби въ однородныя

части (къ одинакому знаменателю), а потомъ числителя дѣлимой дроби дѣлятъ на числителя дѣлящей, чрезъ что и получаютъ искомое частное. Если дѣлимое, или дѣлитель, состоитъ изъ смѣшаннаго числа, то прежде всего смѣшанное число приводится въ неправильную дробь.

Примѣры въ большихъ числахъ.

4. *Сколько разъ* $^{21}/_{40}$ *содержится въ* $^{87}/_{91}$.

Рѣш. $^{87}/_{91} : {}^{21}/_{40} = \frac{87.40}{91.40} : \frac{21.91}{40.91} = \frac{87.40}{21.91} = \frac{3.29.40}{3.7.91} = \frac{29.40}{7.91} = {}^{1160}/_{637} = 1\,{}^{523}/_{637}$.

Примѣчаніе. Здѣсь, при приведеніи дробей къ одинакому знаменателю, всѣ произведенія изображаются только въ своихъ множителяхъ, для той цѣли, чтобъ при окончательномъ результатѣ тотчасъ можно было видѣть, на какія именно числа сокращается частное, и этимъ сокращеніемъ непремѣнно воспользоваться.

5. *Раздѣлить* $^{18}/_{25}$ *на* $^{14}/_{63}$.

Рѣш. $^{18}/_{25} : {}^{14}/_{63} = \frac{18.63}{25.63} : \frac{14.25}{63.25} = \frac{18.63}{14.25} = \frac{2.9.7.9}{2.7.25} = \frac{9 \times 9}{25} = {}^{81}/_{25} = 3\,{}^{6}/_{25}$.

6. *Что получится въ частномъ, если* $7\,{}^{3}/_{9}$ *раздѣлить на* $5\,{}^{2}/_{11}$?

Рѣш. $7\,{}^{7}/_{9} : 5\,{}^{2}/_{11} = {}^{70}/_{9} : {}^{35}/_{11} = \frac{70 \times 11}{9 \times 11} : \frac{55 \times 9}{11 \times 9} = \frac{70 \times 11}{55 \times 9} = \frac{2 \times 35 \times 11}{55 \times 9} = \frac{2 \times 11}{9} = {}^{22}/_{5} = 2\,{}^{4}/_{9}$.

Примѣчаніе. Изъ двухъ послѣднихъ примѣровъ очень ясно видно, ка́къ сокращаются выкладки черезъ то, что произведенія только обозначаются, а не получаются на самомъ дѣлѣ.

Дробь $\frac{70 \times 11}{55 \times 9}$, полученная для частнаго изъ послѣдняго примѣра, состоитъ, какъ видно, изъ двухъ произведеній, изъ которыхъ верхнее равно числителю дѣлимой дроби, умноженному на знаме-

нателя дѣлящей, а нижнее, знаменателю дѣлимой дроби, умноженному на числителя дѣлящей. Отсюда выводятъ краткое правило для дѣленія дробей, а именно: *чтобы раздѣлить одну дробь на другую, для этого стдитъ только первую умножить на обращенную вторую.* Такъ, напр. $^{70}/_{9}$: $(^{35}/_{11}) = {}^{70}/_{9} \times {}^{11}/_{35} = \frac{70 \times 11}{9 \times 35} = 2^{4}/_{9}$.

NB. Дробь $^{35}/_{11}$, заключенная въ скобкахъ, показываетъ, что вмѣсто ея надобно взять $^{11}/_{35}$, т. е. туже дробь, только въ обратномъ порядкѣ (знаменателя вмѣсто числителя, а числителя вмѣсто знаменателя), и въ такомъ случаѣ дѣленіе замѣняется умноженіемъ.

Различные способы рѣшенія одной и той же задачи.

1) $23 : {}^{4}/_{5} = 28\ {}^{3}/_{4}$

a) $23 = {}^{115}/_{5}$; $^{4}/_{5}$ въ $^{115}/_{5}$ тоже что 4 въ 115, или $^{115}/_{4}$, или $28\ {}^{3}/_{4}$.

b) $23 : 1 = 23$; $23 : {}^{1}/_{5} = 23 \times 5 = 115$; $^{115}/_{4} = 28\ {}^{3}/_{4}$. Если 1 въ 23 содержится 23 раза, то $^{1}/_{5}$, будучи *въ 5 разъ менѣе* 1, должна въ числѣ 23 содержаться *въ пять разъ болѣе* 23, или 115. Но какъ требуется раздѣлить не на $^{1}/_{5}$, а на $^{4}/_{5}$, т. е. на дѣлителя вчетверо бо̀льшаго $^{1}/_{5}$, то для частнаго должно взять число *вчетверо менѣе* 115, т. е. $^{115}/_{4}$ или $28\ {}^{3}/_{4}$.

c) $23 : 4 = 5^{3}/_{4}$. Такъ какъ здѣсь взятъ дѣлитель въ пять разъ болѣе даннаго ($^{4}/_{5}$), то и частное $5^{3}/_{4}$ должно быть увеличено въ 5 разъ; $5^{3}/_{4} \times 5 = 25^{15}/_{4} = 28^{3}/_{4}$.

d) $23 = 24 - 1$; $24 : {}^{4}/_{5} = 5 \times 6 = 30$. Но здѣсь дѣлимое взято единицею болѣе настоящаго, въ которой

дѣлитель $^4/_5$ содержится $1^1/_4$ раза (ибо $1: {}^4/_5={}^5/_4=1^1/_4$); поэтому для полученія искомаго частнаго, надобно изъ 30 вычесть $1^1/_4$, что и дастъ $28^3/_4$.

e) $23=20+3$; $20: {}^4/_5=5\times5=25$; $3: {}^4/_5={}^{15}/_4=3^3/_4$; $25+3^3/_4=28^3/_4$.

f) $23: {}^4/_5=$4-й части 23-хъ, взятой 5 разъ$=5\times5^3/_4$. (Это рѣшеніе согласуется съ тѣмъ, которое изложено въ c; вся разница въ формѣ).

g) $23=23\times1$; $1: {}^4/_5={}^5/_4$; $23\times{}^5/_4={}^{115}/_4=28^3/_4$.

2. *Если раздѣлить $^{12}/_{25}$ на $^4/_5$, то что получится на каждую часть?*

Отвѣтъ. $^3/_5$; потому, что

a) $^{12}/_{25}: 4={}^3/_{25}$; дробь $^3/_{25}$ должна быть умножена на 5, ибо дѣлитель 4 въ пять разъ болѣе даннаго; итакъ, $^3/_{25}\times5={}^{15}/_{25}={}^3/_5$.

b) $^{12}/_{25}: 1={}^{12}/_{25}$; $^4/_5$ есть пятая часть 1, умноженная на 4; $^{12}/_{25}: {}^1/_5=\frac{5\times12}{25}={}^{12}/_5$; но данный дѣлитель въ 4 раза болѣе $^1/_5$; поэтому послѣднее частное, или $^{12}/_5$ надобно уменьшить въ 4 раза,—что и дастъ $^{12}/_{20}$ или $^3/_5$.

c) $^4/_5={}^{80}/_{100}$; $^{12}/_{25}={}^{48}/_{100}$; 48 отъ 80 составляютъ $^{48}/_{80}$, или $^6/_{10}$, или $^3/_5$.

и проч. и проч.

Сколь важны для развитія ума такія различныя точки зрѣнія при рѣшеніи задачъ, въ томъ, кажется, послѣ приведенныхъ нами примѣровъ, нечего сомнѣваться.

N° 56. ОСЬМОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Первое дополненіе ко Второй Степени. Сравнительный обзоръ двухъ послѣднихъ дѣйствій надъ дробными числами, также рѣшеніе нѣсколькихъ, болѣе трудныхъ задачъ, встрѣчающихся въ дѣленіи дробей.

α) Сравненіе умноженія съ дѣленіемъ.

Произведеніе, получаемое отъ умноженія цѣлыхъ чиселъ одного на другаго, всегда во столько разъ болѣе множимаго, сколько въ множителѣ заключается единицъ; частное же, получаемое отъ раздѣленія цѣлыхъ чиселъ, всегда менѣе дѣлимаго во столько разъ, сколько въ дѣлителѣ содержится единицъ; не то бываетъ при умноженіи и дѣленіи дробей. Здѣсь часто результаты, получаемые отъ умноженія двухъ дробей, одна на другую, бываютъ менѣе результатовъ, находимыхъ чрезъ дѣленіе тѣхъ же дробей. *Произведеніе всегда менѣе множимаго въ томъ случаѣ, когда цѣлое или смѣшанное число, также правильная дробь множатся на правильную дробь; напротивъ, частное всегда болѣе дѣлимаго, когда тѣ же самыя числа дѣлятся на правильную дробь.*

a) Умноженіе	b) Дѣленіе.
1) $5 \times {}^3/_4 = 3\,{}^3/_4$ $(3\,{}^3/_4 < 5)$	1) $5 : {}^3/_4 = 6\,{}^2/_3$ $(6\,{}^2/_3 > 5)$
2) $7\,{}^1/_6 \times {}^2/_3 = 4\,{}^7/_9$ $(4\,{}^7/_9 < 7\,{}^1/_6)$	2) $7\,{}^1/_6 : {}^2/_3 = 10\,{}^3/_4$ $(10\,{}^3/_4 > 7\,{}^1/_6)$
3) ${}^2/_3 \times {}^4/_5 = {}^8/_{15}$ $({}^8/_{15} < {}^2/_3)$	3) ${}^2/_3 : {}^4/_5 = {}^5/_6$ $({}^5/_6 > {}^2/_3)$

Слѣдственно, чтобы правило умноженія имѣло мѣсто, какъ при цѣлыхъ такъ и дробныхъ числахъ, его надобно выразить такъ: *умноженіе есть такое*

дѣйствіе, посредствомъ котораго, по двумъ числамъ (множимому и множителю) находятъ третіе, которое такъ составлено изъ множимаго, какъ множитель составленъ изъ единицы. (См. 164 стр. I части).

β) Есть не мало задачъ, относящихся къ дробнымъ числамъ, рѣшеніе которыхъ требуетъ особеннаго размышленія. Предложимъ здѣсь нѣсколько такихъ задачъ съ ихъ рѣшеніями.

1. *Какое число уменьшится на* $^5/_9$ *единицы, будучи умножено на* $^2/_3$?

Отв. Умножить какое-либо число на $^2/_3$ значитъ *третью* часть его повторить два раза; оттого оно уменьшится на одну третью часть. Эта третья часть по заданію равна $^5/_9$; поэтому все число $=$ $3 \times {}^5/_9 = {}^{15}/_9 = 1{}^2/_3$.

2. *Какое число, будучи раздѣлено на* $^2/_3$, *увеличится на* 6 *единицъ?*

Отв. 12; потому что $1 : {}^2/_3$ даетъ въ частномъ число въ $1^1/_2$ раза болѣе дѣлимаго; отсюда ясно, что всякое число, будучи раздѣлено на $^2/_3$, увеличивается въ $1^1/_2$ раза; но, по условію задачи, искомое число черезъ раздѣленіе его на $^2/_3$ должно увеличиться 6 единицами; поэтому 6 составляютъ $^1/_2$ искомаго числа, а 12 цѣлое искомое число. Дѣйствительно, $12 : {}^2/_3 = 18$; $18 > 12$ шестью единицами.

3. *Какое число увеличится на* 9 *черезъ раздѣленіе его на* $^3/_4$.

Отв. 27. Если $1 : {}^3/_4 = 1{}^1/_3$, то изъ этого видно, что всякое число черезъ раздѣленіе на $^3/_4$ увеличивается на $^1/_3$; но, по условію задачи, число увеличивается на 9 единицъ; значитъ что 9 все равно,

что $^1/_3$ искомаго числа. Отсюда все число $= 3 \times 9$ или 27. Въ самомъ дѣлѣ, 27: $^3/_4 = 36$; но $36 > 27$ девятью единицами.

4. *На какое число должно раздѣлить 8, чтобы въ частномъ вышло число, которое на четвертую часть 8 было бы болѣе 8.*

Отв. На $^4/_5$; ибо число, которое на четвертую часть 8 болѣе 8 есть 10 (четверть $8 = 2$; $8 + 2 = 10$). Если 10 произошло отъ дѣленія на 8, то дѣлитель долженъ показывать, сколько разъ 10 содержится въ 8; слѣдственно, искомый дѣлитель есть $^8/_{10}$, или $^4/_5$. $8 : {}^4/_5 = 10$.

5. *Въ какомъ числѣ $^4/_3$ содержатся $^3/_4$ раза?*

Отв. Въ 1. Дробь, въ которой $^1/_3$ содержится $^1/_4$ раза есть $^1/_{12}$; дробь, въ которой $^1/_3$ содержится $^3/_4$ раза, втрое болѣе $^1/_{12}$, или $^3/_{12}$; слѣдственно, число, къ которомъ $^4/_3$ содержится $^3/_4$ раза, должно быть въ 4 раза болѣе $^3/_{12}$, т. е. $\frac{4 \times 3}{12} = {}^{12}/_{12} = 1$.

6. *Какое число должно раздѣлить на $^1/_3$, чтобы получить 7?*

Отв. $2^1/_3$. Найти число, которое, будучи раздѣлено на $^1/_3$, даетъ 7, значитъ тоже, что найти въ какомъ числѣ $^1/_3$ содержится 7 разъ. Если $^1/_3$ въ искомомъ числѣ содержится 7 разъ, то искомое число должно быть въ 7 разъ болѣе $^1/_3$, т. е. $^7/_3$ или $2^1/_3$.

Примѣненія. $6\frac{1}{9}$ есть какая часть $\frac{11}{12}$? — $\frac{1}{9}$ *шести* и $\frac{1}{8}$ *девяти* составляютъ вмѣстѣ пятую часть отъ какого числа? — Изъ двухъ чиселъ бо̀льшее равняется $15\frac{3}{4}$, а треть

частнаго, получаемаго отъ раздѣленія бо̀льшаго на мѐньшее, есть $\frac{7}{8}$. Чему равно мѐньшее число? — Найти двѣ дроби, которыхъ сумма $= \frac{11}{15}$, и изъ которыхъ одна болѣе другой въ 8 разъ — Если $\frac{7}{12}$ умножить на 6, то $\frac{1}{8}$ произведенія какимъ числомъ будетъ менѣе $\frac{1}{12}$? — Во сколько разъ частное, происшедшее отъ дѣленія 16 на $2\frac{2}{3}$, болѣе или менѣе частнаго, происшедшаго отъ дѣленія $2\frac{1}{5}$ на $\frac{11}{14}$? — Сколько разъ къ $5\frac{3}{7}$ надобно прибавлять по $11\frac{3}{4}$, чтобы получить число 80? — Сколько разъ отъ единицы должно отнимать по $\frac{13}{101}$, чтобы получить въ остаткѣ 0? — Раздѣлить $5\frac{3}{4}$ на двѣ такія части, что если бо̀льшая раздѣлится на мѐньшую, то въ частномъ также получится $5\frac{3}{4}$. — Если вычтемъ изъ бо̀льшаго числа мѐньшее, то въ остаткѣ будетъ $3\frac{2}{5}$; если раздѣлимъ бо̀льшее на мѐньшее, то въ частномъ выйдетъ $3\frac{2}{5}$. — Тройное неизвѣстное число и $32\frac{5}{17}$ равняются двойному неизвѣстному числу, сложенному съ $20\frac{3}{5}$. Чему равно неизвѣстное число? — Если число моихъ денегъ умножить на 5, и къ произведенію приложить $25\frac{1}{2}$ руб., то получится тоже число рублей, какое бы получили отъ умноженія числа моихъ денегъ на 3 и прибавленія къ произведенію $87\frac{3}{4}$. Сколько у меня денегъ? — Найти дробь по слѣдующимъ условіямъ: если только къ числителю ея прибавить 3, то она обратится въ $\frac{1}{5}$; если же только къ знаменателю прибавить 1, то она обратится въ $\frac{1}{5}$.

N° 57. ДЕВЯТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Второе дополненіе ко Второй Степени.

Исчисленія составными числами.

1. *Раздробленіе.*

Въ $3^5/_9$ *пуда сколько золотниковъ?*

Отв. $13653^1/_3$.

Исчисленіе.

3 п. × 3840 = 11520 зол.; $^5/_9$ п. × 3840 = $\frac{5 \times 1280}{3}$ зол. = $^{6400}/_3$ = $2133^1/_3$ зол.

+ $2133\,^1/_3$ зол.
$13653\,^1/_3$ зол.

Изъясненіе. 3 пуда имѣютъ 11520 зол. Чтобъ узнать, сколько въ $\frac{5}{9}$ пуда золотниковъ, надобно $\frac{5}{9}$ умножить на 3840, потому что каждый пудъ въ 3840 разъ болѣе золотника.

2. *Превращеніе.*

$^2/_5$ *дюйма какую часть составляютъ 1 сажени?*

Отв. $^1/_{205}$ саж.; потому что $^2/_5$ дюйма во столько разъ мѐньше 1 сажени, во сколько разъ 1 сажень болѣе 1 дюйма; но 1 саж. въ 84 раза болѣе дюйма; поэтому, чтобъ узнать, какую часть $^2/_5$ д. составляютъ отъ 1 сажени, надобно дробь $^2/_5$ раздѣлить на 84, или все тоже, увеличить ея знаменателя въ 84 раза. $^2/_5$: 84 = $\frac{2}{5 \times 84}$ = $\frac{1}{5 \times 42}$ = $^1/_{205}$.

2 *фунта* + $5^7/_9$ *лот. привести въ пуды.*

Отв. $^{61}/_{1152}$ пуда. 2 ф. + $5^7/_9$ лот. = 64 лот. + $3^7/_9$ лот. = $67^7/_9$ лот. = $\frac{67 \times 9 + 7}{9}$ = $^{610}/_9$ лот.; 1 лотъ составляетъ $^1/_{32}$ фунта, или $^1/_{1280}$ пуда. Итакъ, для приведенія $^{610}/_9$ лот. въ пуды, надобно $^{610}/_9$: 1280, что = $^{610}/_{11520}$ = $^{61}/_{1152}$.

3. *Сложеніе составныхъ чиселъ.*

Примѣръ 1.

			21	
5 кулей	7 четвер.	$3^2/_3$ гарн.	7	14
4 — — —	2 — — —	$5^1/_7$ — — —	3	3
7 — — —	0 — — —	$3^8/_{21}$ — — —	1	8
17 — — —	2 — — —	$4^4/_{21}$ — — —		$^{25}/_{21} = 1^4/_{21}$.

Примѣръ 2. *Найти сумму* $^2/_3$ *пуда* + $^2/_3$ *ф* + $^2/_3$ *лота.*

Отв. $875\frac{1}{3}$ лота, или 27 ф. $11\frac{1}{3}$ лот.

$\frac{2}{3}$ пуда $= \frac{2 \times 1280}{3}$ лота $= \frac{2560}{3} = 853\frac{1}{3}$ лота

$\frac{2}{3}$ ф. $= \frac{2 \times 32}{3}$ лота $= \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$ — —

$+ \frac{2}{3}$ — —

$875\frac{1}{3}$ — —

4. *Вычитаніе составныхъ количествъ.*

Изъ 5 руб. $41\frac{2}{5}$ *коп. вычесть 3 р.* $99\frac{15}{16}$ *коп.*

	80	
5 руб. $41\frac{2}{5}$ коп.	16	32+80=112
3 — — $99\frac{15}{16}$ — —	5	75
1 $41\frac{37}{80}$	$\frac{37}{80}$	

Какимъ числомъ $\frac{2}{3}$ *сажени болѣе* $\frac{2}{3}$ *дюйма?*

Чтобъ узнать, какимъ числомъ $\frac{2}{3}$ сажени болѣе $\frac{2}{3}$ дюйма, надобно или $\frac{2}{3}$ саж. привести сперва въ дюймы, ибо только однородныя мѣры могутъ быть сравниваемы между собою, или $\frac{2}{3}$ д. привести въ сажени. $\frac{2}{3}$ саж. $= \frac{2 \times 84}{3}$ дюйм. $= 2 \times 28 = 56$ дюйм.; 56 дюймовъ болѣе $\frac{2}{3}$ д. на $55\frac{1}{3}$ дюйма.

5. *Умноженіе составныхъ количествъ.*

Отъ числа 2 лѣтъ 7 мѣс. 13 дней взять $\frac{2}{3}$.

Взять отъ числа какую-либо часть, значитъ увеличить его во столько разъ, сколько единицъ въ числителѣ, и потомъ уменьшить во столько разъ, сколько единицъ въ знаменателѣ. Поэтому, чтобы получить $\frac{2}{3}$ отъ даннаго составнаго числа, надобно его сперва умножить на 2, а потомъ раздѣлить на 3.

2 года 7 мѣс. 13 дн.

$\times 2$

3	4 — — 14 — — 26 —	1 годъ 8 мѣс. $28\frac{2}{3}$ д.

```
1 × 12
    ——
    12 мѣ.
  + 14
    ——
    26 мѣ.
     2
  × 30
    ——
    60 дней
  + 26
    ——
    86 д.
    26
    ——
     2
```

Умножить 5 саж. 2 ф. $11^3/_4$ *дюйма на* $5^3/_4$.

Приведя множителя $5^3/_4$ въ неправильную дробь увидимъ, что умножить данное составное число на $5^3/_4$ тоже значитъ, что увеличить его въ 23 раза, и потòмъ уменьшить въ 4 раза.

$$5 \text{ саж. } 2 \text{ ф. } 11^3/_4 \text{ д.} \qquad 11^3/_4 \times 23 = {}^{47}/_4 \times 23 = {}^{1081}/_4$$

$$\times\, 23$$

```
4 | 115 — — 46 — 1081/4 — | 28 саж. 16 ф. 76 9/16 д. =
    35                            31 саж. 1 ф. 4 9/16 д.
    ——
     3 саж.
   × 7
    ——
    21 ф.
  + 46
    ——
    67 ф.
    27
    ——
     3 ф.
  × 12
    ——
    36 д. = 144/4
```

$${}^{144}/_4 \text{ д.} + {}^{1081}/_4 \text{ д.} = {}^{1225}/_4 : 4 = {}^{1225}/_{16} = 76^9/_{16}.$$

6. *Дѣленіе составныхъ чисель.*

1-й *Случай. 5 стопъ 12 дестей $13^2/_3$ листа раздѣлить на $3^2/_5$.*

Раздѣлить на $3^2/_5$, или $^{17}/_5$ тоже значитъ, что раздѣлить на 17 и потóмъ умножить на 5, или обратно, сперва умножить на 5, а потóмъ раздѣлить на 17.

5 стопъ 12 дестей $13^2/_3$ листа : $3^2/_5$ ($^{17}/_5$)

$\times$ 5

17 | 25 ——— 60 ——— $68^1/_3$ — | 1 стопа 12 дест. $26^{31}/_{51}$ лист. = 1 ст. 13 дест. $2^{31}/_{51}$ лист.

8 ст.

$\times 20$

160 дест. $452^1/_3$ л.: $17 = \frac{1357}{3\times17} = {}^{1357}/_{51} = 26^{31}/_{51}$ лист.

60

220

50

16 дест.

$\times 24$

384 лис. + $68^1/_3$ лис. = $452^1/_3$ лист.

2-й *Случай. Какую часть 4 ф. $5^3/_7$ лот. составляютъ отъ 2 пудовъ 11 фунт. $10^1/_3$ лота?*

Здѣсь и дѣлимое (4 ф. $5^3/_7$ лот.) и дѣлитель (2 п. 11 ф. $10^1/_3$ л.) должны быть приведены въ одинакія мѣры, т. е. въ лоты.

4 ф.	2 п.
$\times 32$	$\times 40$
128 лот.	80 ф.
+ $5^3/_7$ л.	+ 11 ф.
$133^3/_7$ лот.	91 ф.
	$\times 32$
	182
	273
	2912 лот. + $10\frac{1}{3} = 2922\frac{1}{3}$.

$133^3/_7 : 2922^1/_3 = {}^{934}/_7 : {}^{8767}/_3 = \frac{934 \times 3}{8767 \times 7} = \frac{2802}{61369}$.

Примѣненія. Узнать, чѣмъ одна башня болѣе другой, если высота первой имѣетъ 13 саж. $5\frac{3}{4}$ ф., а высота второй составляетъ отъ высоты первой $\frac{4}{5}$.—Спросили у одного ученика: который часъ? Онъ отвѣчалъ на вопросъ такъ: оставшаяся часть сутокъ составляетъ $\frac{1}{5}$ протекшей ночи.— Купецъ продалъ $3\frac{5}{8}$ ящика черносливу, изъ которыхъ въ каждомъ было по 3 пуда 17 ф. $5\frac{5}{8}$ лота. Узнать, сколько онъ продалъ всего черносливу? — Два путешественника отправляются изъ разныхъ мѣстъ, находящихся на разстояніи 236 верстъ одно отъ другаго. Первый проѣзжаетъ въ каждый часъ по 10 верстъ 107 саж., а второй въ каждые 2 часа по 23 версты 200 саж. Спрашивается: сколько верстъ употребитъ каждый для взаимной встрѣчи?— Чѣмъ $1\frac{2}{5}$ фунта болѣе $10\frac{5}{6}$ золотника? — Во сколько дней будетъ издержано 2 пуда $14\frac{1}{3}$ фунта сахару, если каждый день издерживать по $15\frac{2}{5}$ лота? —

ТРЕТІЯ СТЕПЕНЬ.

ДѢЙСТВІЯ НАДЪ ДЕСЯТИЧНЫМИ И НЕПРЕРЫВНЫМИ ДРОБЯМИ.

Изъ всѣхъ дробей, разсмотрѣнныхъ нами во Второй Степени, заслуживаютъ особаго вниманія, во-первыхъ, дроби, имѣющія знаменателемъ единицу съ однимъ или нѣсколькими нулями, напр. $^{2}/_{10}$, $^{15}/_{100}$, $^{179}/_{1000}$ и т. д.; во-вторыхъ, тѣ, которыя, будучи выражены въ большихъ числахъ, не могутъ быть сокращены; напр. $^{127}/_{802}$, $^{412}/_{1049}$, $^{69}/_{149}$ и т. д.

Первыя, называемыя *десятичными*, даютъ намъ возможность производить надъ ними исчисленія столь же просто, какъ и надъ цѣлыми числами. Впослѣдствіи увидимъ, что всѣ вообще дроби можно легко приводить въ десятичныя, и черезъ то значительно сокращать выкладки надъ дробными числами. Вторыя же, будучи разложены на ряды, называемые *непрерывными дробями*, приводятъ насъ къ такимъ дробямъ, выраженнымъ въ малыхъ числахъ, которыя если *не точно*, то по крайней мѣрѣ *приблизительно* замѣняютъ дроби, изображенныя въ большихъ числахъ. Напримѣръ, посредствомъ такой непрерывной строки мы узнаёмъ, что если дробь $^{159}/_{493}$, которую сократить невозможно, замѣнимъ дробью $^{1}/_{3}$, то разность между ними составитъ

только $^1/_{84}$; равнымъ образомъ убѣдимся, что величина дроби $^{159}/_{493}$ заключается между дробями $^9/_{28}$ и $^{10}/_{31}$, и когда которою-нибудь изъ послѣднихъ замѣнимъ первую, то погрѣшность сдѣлается менѣе $^1/_{868}$.

Очевидно, что важнѣйшая выгода отъ десятичныхъ и непрерывныхъ дробей состоитъ въ сокращеніи дѣйствій надъ числами, къ чему преимущественно мы и должны стремиться, какъ было уже указано на то во Второй Степени.

Примѣчаніе. Когда бъ мы не дорожили временемъ и не находили скуки въ длинныхъ выкладкахъ, тогда бы вся Ариѳметика состояла изъ двухъ основныхъ и одно другому противоположныхъ дѣйствій: *сложенія* и *вычитанія*. *Сокращеніе вычисленій* — вотъ что заставило размножить Ариѳметику.

Итакъ, въ предлежащей Степени займемся исчисленіями надъ десятичными и непрерывными дробями, и для удобности изложенія раздѣлимъ эту Степень на два главные отдѣла.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

Дѣйствія надъ десятичными дробями.

№ 58. ПЕРВОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Счисленіе и изображеніе десятичныхъ дробей.

a) Счисленіе десятичныхъ дробей.

Какъ тысяча состоитъ изъ 10 сотенъ, сотня изъ десяти десятковъ и десятокъ изъ 10 единицъ, такъ

равно каждая единица состоитъ изъ 10 равныхъ частей, называемыхъ *десятыми*, каждая десятая изъ десяти равныхъ частей, называемыхъ *сотыми*, каждая сотая изъ десяти равныхъ частей, именуемыхъ *тсячными*. Слѣдуя тому же порядку уменьшенія, послѣдовательно получимъ *десяти-тысячныя*, *сто-тысячныя*, *милліонныя* части и т. д.

Изображая *десятую* ($^1/_{10}$), *сотую* ($^1/_{100}$), *тысячную* ($^1/_{1000}$) часть единицы и т. д., или нѣсколько *десятыхъ*, *сотыхъ*, *тысячныхъ* частей и т. д. посредствомъ цифръ, примѣчаемъ, что всѣ эти дроби имѣютъ знаменателемъ единицу съ однимъ, двумя, тремя и т. д. нулями. Такія-то дроби именуются *десятичными*.

Примѣчаніе. Всѣ прочія дроби для отличія отъ десятичныхъ, называются *простыми* — названіе, усвоенное употребленіемъ.

Легко замѣтить, что знаменатели десятичныхъ дробей, по мѣрѣ уменьшенія самихъ дробей въ десять разъ, *вдесятеро* увеличиваются. Такъ знаменатель одной сотой ($^1/_{100}$) вдесятеро болѣе знаменателя одной десятой ($^1/_{10}$); знаменатель одной тысячной ($^1/_{000}$) вдесятеро болѣе знаменателя одной сотой ($^1/_{100}$) и т. д.

Отсюда получаемъ возможность, подвести изображеніе десятичныхъ дробей подъ тѣ же самыя правила, которыми руководствуемся при счисленіи цѣлыми числами. Дѣйствительно, если въ изображеніи какого-либо цѣлаго числа цифрами, примѣчаемъ, что цифры, слѣдуя отъ правой руки къ лѣвой, безпрестанно увеличиваютъ значеніе свое

въ десять кратъ, то обратно, отъ лѣвой руки къ правой онѣ теряютъ свое значеніе также въ десять кратъ. Поэтому, когда съ правой стороны отъ цѣлаго числа, написаннаго цифрами, поставимъ еще нѣсколько цифръ, отдѣливъ притомъ цѣлое число отъ этихъ новыхъ цифръ какимъ-либо знакомъ, напримѣръ запятою, то послѣдними выразятся части единицы постепенно въ десять разъ уменьшающіяся, т. е. сперва *десятыя*, потòмъ *сотыя*, *тысячныя* и т. д. Объяснимъ это примѣрами.

У. (написавъ на доскѣ произвольное цѣлое число, напр. 346). Покажите значеніе каждой изъ этихъ цифръ.

Учен. Цифра 3 означаетъ *три сотни*, цифра 4 *четыре десятка*, а цифра 6 — *шесть единицъ*.

У. Во сколько же разъ цифры уменьшаютъ свое значеніе, переходя постепенно отъ лѣвой руки къ правой?

Учен. Въ 10 разъ.

У. Если послѣ единицъ предложеннаго числа поставимъ какой-нибудь знакъ, наприм. запятую, и потòмъ за ними напишемъ нѣсколько цифръ, напримѣръ вотъ такъ:

346, 328

то вслѣдствіи обыкновеннаго закона уменьшенія достоинства цифръ въ 10 разъ, по мѣрѣ перестановки ихъ отъ лѣвой руки къ правой, чтò должна означать цифра 5, стоящая на первомъ мѣстѣ послѣ запятой?

Учен. Она должна означать число въ десять разъ меньше единицъ, т. е. *пять десятыхъ.*

У. А цифра 2, стоя́щая за нею?

Учен. Двѣ сотыхъ; ибо эта цифра стои́тъ съ правой стороны цифры, означающей десятыя доли, а потому и должна имѣть значенie въ 10 кратъ мѐньше десятыхъ.

У. Хорошо! а цифра 8?

Учен. Потому же самому закону уменьшенiя она должна означать *тысячныя* части единицы.

У. Этимъ-то значенiемъ цифръ, по мѣсту ими занимаемому, и воспользовались для изображенiя десятичныхъ дробей безъ знаменателя. Слѣдственно, что̀ означаетъ число: 346, 528?

Учен. *Триста сорокъ шесть единицъ* (или цѣлыхъ) и сверхъ того *пять десятыхъ*, *двѣ сотыя* и *восемь тысячныхъ.*

У. Если къ написанному числу прибавимъ цифру 9, то что ею выразится?

Учен. Девять *десяти-тысячныхъ.*

У. Прочтите число: 59, 213296.

Учен. 59 единицъ, 2 десятыя, 1 сотая, 3 тысячныя, 2 десяти-тысячныя, 9 сто-тысячныхъ и 6 миллiонныхъ частей единицы.

У. Но выговаренiе этихъ десятичныхъ частей можно сократить. Возмемъ для примѣра еще цѣлое число съ дробью. Пусть 39, 64 83. Прочтите это число.

Учен. 39 цѣлыхъ, 6 десятыхъ, 4 сотыхъ, 8 тысячныхъ и 3 десяти-тысячныхъ частей единицы.

У. Но какъ выражаются обыкновеннымъ образомъ, посредствомъ числителя и знаменателя, означенныя вами части?

Учен. 6 десятыхъ черезъ $^6/_{10}$, 4 сотыхъ черезъ $^4/_{100}$, 8 тысячныхъ черезъ $^8/_{1000}$, а 3 десяти-тысячныхъ такъ: $^3/_{10000}$.

У. Въ $^6/_{10}$ сколько сотыхъ?

Учен. $^{60}/_{100}$.

У. Поэтому въ $^6/_{10}$ и $^4/_{100}$ сколько всего сотыхъ?

Учен. $^{64}/_{100}$.

У. Въ $^6/_{10}$ сколько тысячныхъ?

Учен. $^{600}/_{1000}$.

У. А въ $^4/_{100}$?

Учен. $^{40}/_{1000}$.

У. Слѣдственно, $^6/_{10} + ^8/_{1000}$ сколько вмѣстѣ составляютъ тысячныхъ?

Учен. 648 тысячныхъ.

У. $^6/_{10} =$ сколькимъ десяти-тысячнымъ?

Учен. $^{6000}/_{10000}$.

У. А $^4/_{100}$?

Учен. $^{400}/_{10000}$.

У. $^8/_{1000}$?

Учен. $^{80}/_{10000}$.

У. Сколько же всего десяти-тысячныхъ составятъ слѣдующія дроби: $^6/_{10} + ^4/_{100} + ^8/_{1000} + ^3/_{10000}$?

Учен. 6483 десяти-тысячныхъ.

У. Итакъ, 6 десятыхъ, 4 сотыхъ, 8 тысячныхъ и 3 десяти-тысячныхъ все равно, что 6483 десяти-тысячныхъ. Отсюда видно, что *число, стоящее съ правой стороны запятой, выговаривается точно также, какъ и помѣщенное съ лѣвой стороны запятой, съ тою*

только разницею, что къ нему прибавляютъ наименованіе тѣхъ десятичныхъ частей, которыя означаются последнею цифрою, считая отъ запятой вправо.

У. Выговорите число: 29, 30205; но прежде скажите, что̀ означаютъ нули на второмъ и четвертомъ мѣстахъ послѣ запятой?

Учен. Они показываютъ, что въ предложенномъ числѣ нѣтъ ни сотыхъ частей, ни десяти-тысячныхъ. Предложенное число выговаривается такъ: 29 цѣлыхъ, тридцать тысячъ двѣсти пять *сто тысячныхъ.*

У. Объясните это.

Учен. $^{3}/_{10}={}^{30}/_{100}={}^{300}/_{1000}={}^{3000}/_{10000}={}^{30000}/_{100000}$; $^{2}/_{1000}={}^{200}/_{100000}$; $^{30000}/_{100000}+{}^{200}/_{100000}+{}^{5}/_{100000}=30205$ *сто-тысячныхъ.*

Задачи.

1) Выговорить число: 2,00109

2) — — — 59,00000001.

У. Какъ выговаривается число: 5, 23?

Учен. Пять единицъ, двадцать три сотыя части единицы.

У. А если откинуть запятую, что произойдетъ?

Учен.. Пятьсотъ двадцать три единицы.

У. Слѣдственно, *запятая есть необходимый знакъ въ изображеніи десятичной дроби. Она удерживается даже и тогда, когда должно бываетъ выразить одну десятичную дробь безъ цѣлаго числа: послѣднее въ такомъ случаѣ замѣняется нулемъ, поставляемымъ съ лѣвой стороны запятой.* Такъ, напримѣръ:

0,392

означаетъ: триста девяносто двѣ тысячныя.

Задачи.

1) Выговорить дробь: 0,514

2) — — — 0,00129.

Примѣчаніе. Здѣсь не слѣдуетъ вводить той строгой постепенности, которой мы придерживались при изложеніи цѣлыхъ чиселъ и обыкновенныхъ дробей. Многократные опыты положительно доказали, что когда ученики хорошо поняли теорію цѣлыхъ чиселъ и простыхъ дробей, то десятичныя дроби не представляютъ уже потóмъ для нихъ большихъ затрудненій.

У. Которая изъ двухъ дробей болѣе: 0,7 или 0,54?

Учен. 0,7.

У. Какимъ же это образомъ, вѣдь вторая дробь имѣетъ двѣ цифры, а первая одну?

Учен. Первая дробь есть *семь девятыхъ*, а вторая *пятьдесятъ четыре сотыхъ.* По приведеніи же первой дроби въ сотыя части, найдемъ, что въ ней содержится *семьдесятъ сотыхъ.*

У. Итакъ, *изъ двухъ или нѣсколькихъ десятичныхъ дробей не всегда та бóльшая, которая выражена бóльшимъ числомъ цифръ, но та, въ которой ближайшая къ занятой значащая цифра есть бóльшая.*

Такъ: $0,51 > 0,499$

$0,068 > 0,0589181791.$

Кромѣ двухъ предложенныхъ способовъ счисленія десятичныхъ дробей есть еще третій. Мы знаемъ, что какое-либо смѣшанное число, положимъ 17, 59 выговаривается такъ: 17 цѣлыхъ 59 сотыхъ; но 17 единицъ все равно, что $^{170}/_{10}$ или $^{1700}/_{100}$; 1700 сотыхъ + 59 сотыхъ = 1759 сотымъ частямъ единицы. Слѣдственно, цѣлое число, находящееся

предъ десятичною дробью, всегда можетъ быть приведено въ тѣ части, какія означаются самою десятичною дробью.

Уч. Въ 3,01 сколько всего сотыхъ?

Учен. 301 сотая, потому что 3 единицы все равно, что 30 десятыхъ или 300 сотыхъ.

Поэтому, всякое смѣшанное число, т. е. состоящее изъ цѣлаго числа и десятичной дроби, можно выговорить трояким образомъ:

Во-первыхъ, выговаривая сперва знаки, изображающіе цѣлое число, а потóмъ каждый изъ знаковъ, составляющихъ десятичную дробь, съ присовокупленіемъ наименованія ихъ отдѣловъ, какъ то: сотыхъ, тысячныхъ и т. д. частей единицы.

Во-вторыхъ, выговаривая также сперва знаки, изображающіе цѣлое число, а потóмъ знаки, составляющіе десятичную дробь, какъ будто бы они составляли цѣлое число, съ присовокупленіемъ къ нему наименованія тѣхъ частей, къ которому принадлежитъ послѣдній знакъ десятичной дроби, считая отъ лѣвой руки къ правой.

Въ - третьихъ, выговаривая вдругъ всѣ знаки смѣшаннаго числа, какъ будто бы оно было одно цѣлое число, съ присовокупленіемъ къ нему наименованія того отдѣла частей, къ которому принадлежитъ послѣдній знакъ отъ лѣвой руки.

Напримѣръ, число 23, 1235 можно выговорить такъ:

1, двадцать три единицы, одна десятая, двѣ сотыя, 3 тысячныя и пять десяти-тысячныхъ;

2, двадцать три единицы, тысяча двѣсти тридцать пять десяти-тысячныхъ;

3, двѣсти тридцать одна тысяча двѣсти тридцать пять десяти-тысячныхъ.

Примѣчаніе. Въ преподаваніи не должно выпускать изъ виду этого троякаго видоизмѣненія.

Изъ всего сказаннаго извлекаемъ слѣдующія сокращенныя правила:

1, *Десятичныя дроби могутъ быть изображены безъ знаменателей, которые легко подразумѣваются.*

2, *Величина долей, въ которыхъ изображается десятичная дробь, зависитъ отъ числа цифръ, её составляющихъ. Если въ десятичной дроби одна цифра, то она выражается въ десятыхъ доляхъ; если двѣ-въ сотыхъ, три-въ тысячныхъ,* и т. д.

3, *Величина же самой десятичной дроби не столько зависитъ отъ числа знаковъ, её изображающихъ, сколько отъ величины ближайшей къ запятой значащей цифры.*

4, *Цифры, стоящія по правую руку послѣ запятой, которая служитъ знакомъ отдѣленія цѣлаго числа отъ дроби, составляютъ числителя десятичной дроби, а подразумѣваемый знаменатель есть* 1, *сопровождаемая такимъ числомъ нулей, сколько находится всего цифръ послѣ запятой.*

β. Изображеніе десятичныхъ дробей.

Мы видѣли, что всякая десятичная дробь не нуждается въ знаменателѣ, который всегда подразумѣваемъ быть можетъ; поэтому, нѣтъ надобности его и писать. Чтобъ изобразить $^2/_{10}$, напишемъ сперва нуль, за нимъ запятую, а потòмъ цифру 2, вотъ такъ: 0,2. Еслибъ предъ цифрою 2 не стояло

нули съ запятою, тогда бы не было означено перехода отъ единицъ къ десятымъ долямъ, и цифра 2 означала бы двѣ единицы; теперь же, стоя на первомъ мѣстѣ послѣ запятой, она означаетъ 2 десятыя.

Для выраженія числа $5^{517}/_{1000}$, пишу 5, ставлю послѣ этой цифры запятую, и потомъ пишу сперва цифру 5, далѣе 1, наконецъ 7,—вотъ такимъ образомъ: 5, 517; ибо дробь $^{517}/_{1000}$ состоитъ изъ $^{500}/_{1000}$, $^{10}/_{1000}$ и $^{7}/_{1000}$; $^{500}/_{1000}$ все равно, что 5 десятыхъ; $^{10}/_{1000}$ = 1 сотой: 5 десятыхъ должно поставить на первомъ мѣстѣ послѣ запятой, 1 сотую—на второмъ, и 7 тысячныхъ—на третьемъ.

Еще примѣръ: для означенія $^{17}/_{1000}$, на первомъ мѣстѣ послѣ запятой надобно поставить нуль, потому что въ дроби $^{17}/_{1000}$, которую можно разложить на $^{1}/_{100}$ и $^{7}/_{1000}$, не содержится ни одной десятой. Слѣдственно, $^{17}/_{1000}$=0, 017. Какъ надобно-бы было читать это выраженіе, если бъ между запятою и 1 не стояло нуля? —

Примѣры:

$$5^{37}/_{1000} = 5,\ 037$$
$$^{561}/_{10000} = 0,\ 0561$$
$$^{1}/_{1000000} = 0,\ 000001$$
$$^{203}/_{100000} = 0,\ 00203.$$

Какія же сокращенныя правила можно извлечь изъ этихъ примѣровъ?

Вотъ онѣ:

1. *Во всякой десятичной дроби должно быть столько цифръ послѣ запятой, сколько въ знаменателѣ нахо-*

дится нулей послѣ единицы, потому что собственно числомъ этихъ цифръ и опредѣляется знаменатель дроби.

2. *Если въ числителѣ данной дроби находится столько же цифръ, сколько въ знаменателѣ нулей, то числитель пишется, какъ онъ есть, и передъ нимъ ставится запятая, и за нею влѣво цѣлое число, буде при дроби оно находится, въ противномъ случаѣ нуль.*

3. *Если число цифръ числителя менѣе числа нулей знаменателя, то между запятою и числителемъ вставляется столько нулей, сколько показываетъ разность между числомъ нулей знаменателя и числомъ цифръ числителя.*

4. *Наконецъ, когда въ неправильной десятичной дроби число цифръ числителя превышаетъ число нулей въ знаменателѣ, то въ числителѣ отдѣляется отъ правой стороны къ лѣвой для десятичной дроби столько цифръ, сколько находится нулей въ знаменателѣ; остальныя же цифры будутъ означать цѣлое число.*

N° 59. ВТОРОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Измѣненіе величины десятичныхъ дробей, также приведеніе ихъ къ одному знаменателю.

а Увеличеніе десятичныхъ дробей.

Увеличеніе дроби, какъ намъ извѣстно, зависитъ между прочимъ отъ уменьшенія ея знаменателя, а уменьшеніе ея, напротивъ, отъ увеличенія послѣдняго. Въ десятичной же дроби, какъ мы видѣли въ предыдущемъ упражненіи, знаменатель уменьшается или увеличивается по мѣрѣ уменьшенія или увеличенія числа цифръ, стоящихъ послѣ

запятой, или, что одно и тоже, отъ перемѣщенія запятой справа влѣво, или обратно. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что дробь $^2/_{100}$, будучи увеличена въ 10 разъ, составляетъ $^2/_{10}$; но $^2/_{100}$ изображаются черезъ 0, 02, а двѣ десятыя черезъ 0,2. Сравнивая между собою оба выраженія: 0, 02 и 0,2, находимъ, что для увеличенія $^2/_{100}$ въ 10 разъ, стòитъ только передвинуть запятую отъ лѣвой руки къ правой черезъ одинъ знакъ, и тогда цифра 2 будетъ стоять на первомъ мѣстѣ послѣ запятой,—что и должно быть, ибо цифры, занимающія первое мѣсто послѣ запятой, означаютъ десятыя части единицы.

Возмемъ еще примѣръ: *требуется увеличить дробь* 0, 479 *въ* 100 *разъ.*

Дробь 0, 479 можно изобразить такъ: $^{479}/_{1000}$.

Увеличить эту дробь въ 100 разъ значитъ уменьшить ея знаменателя въ 100 разъ $^{479}/_{1000} \times 100 = {}^{479}/_{10}$. Число $^{479}/_{10}$ состоитъ изъ 47 ц. и $^9/_{10}$, что по принятому нами способу изображенія можно представить такъ: 47,9.

Сравнивая теперь оба выраженія

$$\left.\begin{array}{r} 0,\ 479 \\ 47,\ 9 \end{array}\right\}$$

увидимъ, чтобы изъ перваго получить второе, надобно только въ первомъ перенести запятую черезъ два знака отъ лѣвой руки къ правой, и поставить её между цифрами 7 и 9. Черезъ это перемѣщеніе цифра 4, означавшая сперва десятыя доли единицы, получаетъ значеніе десятковъ единицъ, цифра 7, показывавшая сотыя, означаетъ

единицы, а 9, которая выражала тысячныя, показываетъ теперь десятыя доли. Итакъ выходитъ, что каждая часть даннаго дробнаго числа увеличилась въ 100 разъ, а потому и все число также увеличилось въ 100 разъ. Это можно объяснить и черезъ разложеніе. Дробь 0, $479 = \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{9}{1000}$; $\frac{4}{10} \times 100 = 40$ еди., $\frac{7}{100} \times 100 = 7$ един.; $\frac{9}{1000} \times 100 = \frac{9}{10}$; 40 ед. + 7 ед. + $\frac{9}{10}$ + 47 $\frac{9}{10}$ = 47, 9.

Примѣненія. Увеличить дробь 0,0439 въ 10, 100, 1000 разъ.—Число 5, 308 увеличить сперва въ 10 разъ, а потòмъ въ 100 разъ.—Дробь 0, 0000007 увеличить въ милліонъ разъ.

Отсюда выводимъ правила:

1, *Чтобъ увеличить какую-нибудь десятичную дробь въ* 10 *разъ, надобно только значеніе каждой цифры увеличить въ* 10 *разъ,—что и сдѣлается, когда запятая перенесется отъ лѣвой руки къ правой черезъ одну цифру.*

Такъ:

0, 39×10=3, 9

0, 0003×10=0, 003.

2, *Для увеличенія десятичной дроби въ* 100 *разъ, должно значеніе каждой цифры увеличить въ* 100 *разъ, или все тоже, переставить запятую слѣва вправо черезъ два знака.*

0, 497×100=49, 7

0, 000×100=0, 02.

Теперь не трудно понять, какимъ образомъ увеличить десятичную дробь въ 1000, 10000, 100000 и т. д. разъ.

Вотъ примѣры:

7, 309767×10=73, 09767

7, 309767×100=730, 9767

7, 309767×1000=7309, 767

7, 309767×10000=73097, 67 и т. д.

Здѣсь намъ представляются два важныя замѣчанія.

1. Увеличивая какую-либо дробь, положимъ 0, 0053, по извѣстному намъ закону всякой разъ вдесятеро, мы можемъ наконецъ дойти до того, что вмѣсто дроби получимъ одно цѣлое число. Дѣйствительно, увеличивъ дробь 0, 0053 въ десять тысячъ кратъ, получимъ число 53 единицы. Въ этомъ случаѣ въ запятой не нуждаемся болѣе, ибо дроби уже не существуетъ.

Сравнивая между собою оба числа: 0, 0053 и 53, видимъ, что послѣднее есть не что иное, какъ числитель первой дроби. Отсюда заключаемъ, что если въ какой-нибудь десятичной дроби отнимемъ во все запятую, то получимъ одного числителя, который въ этомъ случаѣ есть выраженіе цѣлаго числа, происшедшаго отъ увеличенія данной дроби во столько разъ, сколько находится единицъ въ знаменателѣ.

Примѣненія. Что произойдетъ съ дробью 0,07, если откинуть запятую?—Что надобно сдѣлать съ дробью 0, 4159, если желаемъ увеличить её въ 10000 разъ. —

2. Когда же хотимъ узнать произведеніе какой-либо десятичной дроби на множителя, состоящаго изъ 1 съ числомъ нулей, превышающимъ число десятичныхъ знаковъ самой дроби, то для полученія его стóитъ только къ числителю прибавить съ правой стороны столько нулей, сколько показываетъ разность между числомъ нулей множителя и числомъ цифръ десятичной дроби.

Такъ, произведеніе 0, 94 $\times$ 1000 = 940, потому что разность между числомъ нулей множителя и числомъ десятичныхъ знаковъ дроби есть 1.

Произведеніе 0, 2 $\times$ 10000 = 2000. Здѣсь къ числителю дроби прибавлено три нуля, ибо разность въ этомъ случаѣ равна 3.

Причина этого сама по себѣ очевидна и основывается на общемъ законѣ перемѣщенія запятой отъ лѣвой руки къ правой. Чтобы въ послѣднемъ примѣрѣ дробь 0, 2 увеличить въ 10000 разъ, нужно запятую переставить слѣва вправо черезъ 4 знака, а какъ въ дроби всего одна цифра, то и слѣдуетъ послѣ цифры 2 поставить еще три нуля, дабы запятая могла занять приличное ей мѣсто.

Сведи все сказанное въ одну точку, составится слѣдующее общее правило:

Чтобъ увеличить десятичную дробь въ 10, 100, 1000 *разъ и т. д, должно перенести запятую отъ лѣвой руки къ правой на* 1, 2, 3 *цифры и т. д., вообще на столько цифръ, сколько во множителѣ находится нулей послѣ единицы. Если же въ десятичной дроби нѣтъ столько знаковъ, черезъ сколько нужно переставить запятую, то недостающее число ихъ добавляется нулями.*

β. Уменьшеніе десятичныхъ дробей.

Какъ перемѣщеніе запятой слѣва вправо увеличиваетъ значеніе дроби, такъ обратно, перемѣщеніе справа влѣво уменьшаетъ его.

Если въ выраженіи 13, 59 переставимъ запятую черезъ одинъ знакъ влѣво, то получимъ 1, 359. Черезъ таковую перестановку вмѣсто одного десятка получили единицу, вмѣсто 3 единицъ—три де-

сятыя, вмѣсто 5 десятыхъ — пять сотыхъ, и вмѣсто 9 сотыхъ—9 тысячныхъ. Однимъ словомъ, каждая изъ цифръ получила значеніе въ десять разъ меньшее противъ прежняго; слѣдственно, и все число уменьшилось въ десять разъ. —

Повѣримъ сказанное нами на самомъ дѣйствіи. $13,\ 59 = 13^{59}/_{100} = {}^{1359}/_{100};\ {}^{1359}/_{100} : 10 = {}^{1359}/_{1000} = 1,\ 359.$

Итакъ, *раздѣлить какую-либо десятичную дробь на* 10 *все тоже значить, что переставить запятую отъ правой руки къ лѣвой черезъ одну цифру, и обратно, переставить въ десятичной дроби запятую на одинъ знакъ влѣво значить уменьшить дробь въ десять разъ.*

Примѣры.

$$0,\ 975 : \ 10 = 0,\ 0975$$
$$0,\ 0029 : 10 = 0,\ 00029.$$

Какъ черезъ раздѣленіе десятичной дроби на 10, *запятая перемѣщается отъ лѣвой руки къ правой на одну цифру, такъ при раздѣленіи дроби на* 100, *запятую должно переставить черезъ* 2 *цифры, на* 1000 *черезъ три цифры, и т. д.; вообще на столько цифръ, сколько въ дѣлителѣ находится нулей послѣ единицы.*

Примѣры.

$$49,\ 2 : 10 = 4,\ 92$$
$$5,\ 3 : 100 = 0,\ 053$$
$$0,\ 29 : 1000 = 0,\ 00029$$
$$0,\ 1 : 1000000 = 0,\ 0000001$$ и проч. и проч.

Примѣненія. Сперва увеличьте смѣшанное число 2, 5918 *во сто* разъ, а потомъ уменьшите полученное произведеніе въ 10000 разъ. — Я задумалъ такое число, которое, будучи увеличено въ 10 разъ, а потомъ уменьшено въ 1000 разъ, составитъ 2, 13. Какое число я задумалъ? — Дробь

0, 001 произошла отъ увеличенія первоначальнаго числа въ 1000 разъ, а потомъ отъ уменьшенія произведенія въ милліонъ разъ. Какое было первоначальное число? —

γ. *Приведеніе десятичныхъ дробей къ одинакому знаменателю.*

Если въ десятичной дроби отъ числа цифръ, стоящихъ послѣ запятой, зависитъ величина знаменателя, то очевидно, что двѣ или нѣсколько десятичныхъ дробей, въ которыхъ число десятичныхъ знаковъ не одинакое, должны назваться *разнородными* между собою. Чтобъ сдѣлать такія дроби *однородными*, или все тоже, *привести ихъ къ одинакому знаменателю*, необходимо уравнять въ нихъ число десятичныхъ знаковъ, или недостающее число ихъ въ одной дроби предъ другою дополнить нулями. Но можемъ ли мы по произволу съ правой стороны десятичной дроби приписывать нули?

Мы знаемъ, напримѣръ, что $^7/_{10} = {}^{70}/_{100} = {}^{700}/_{1000}$ и т. д., а это все равно, что 0, 7=0, 70=0, 700 и т. д.

Равнымъ образомъ

0, 2 = 0, 20 = 0, 200 и проч.

0, 13 = 0, 130 = 0, 1300 и проч.

У. Даны двѣ дроби: 0, 37 и 0, 279. Въ какихъ частяхъ выражена первая дробь?

Учен. Въ сотыхъ.

У. А вторая?

Учен. Въ тысячныхъ.

У. Какъ же привести ихъ въ одинакія части?

Учен. Должно 37 сотыхъ обратить въ тысячныя, что весьма легко; ибо 37 сотыхъ=370 тысячнымъ; т. е. 0, 37 = 0, 370.

У. Дѣйствительно, хотя через прибавленіе нуля съ правой стороны десятичной дроби, число частей увеличилось въ десять разъ, однакожъ за то части сдѣлались въ десять разъ мельче, что въ сущности нисколько не измѣняетъ дроби. Равнымъ образомъ, прибавивъ съ правой стороны десятичной дроби 0, 73 три нуля (0, 73000), мы увеличиваемъ число частей въ 1000 разъ, но въ тоже время самыя части дѣлаемъ въ 1000 разъ мельче: значитъ, что дробь не перемѣнитъ своего достоинства.

Итакъ вообще, *приписываніе какого бы то ни было числа нулей съ правой стороны десятичной дроби, не измѣняетъ ея значенія или величины.*

Теперь приведеніе нѣсколькихъ десятичныхъ дробей къ одному знаменателю не представляетъ ни малѣйшей трудности. Пусть будетъ данъ примѣръ: *привести къ одинакому знаменателю слѣдующія дроби*:

0, 27
0, 0073
0, 12345

Здѣсь самый большой знаменатель есть 100000; поэтому, чтобъ дробь 0, 27 привести въ сто-тысячныя части, должно съ правой стороны ея прибавить 3 нуля; во второй же дроби довольно прибавить одинъ нуль. Такимъ образомъ получимъ:

$$\text{разнородныя дроби}\left\{\begin{array}{l}0,\ 27 \quad = 0,\ 27000\\ 0,\ 0073 = 0,\ 00730\\ 0,\ 12345 = 0,\ 12345\end{array}\right\}\text{однородныя дроби.}$$

Теперь, послѣ предварительныхъ объясненій относительно десятичныхъ дробей, мы можемъ прямо приступить къ изложенію различныхъ надъ ними дѣйствій.

№ 60. ТРЕТІЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Сложеніе и вычитаніе десятичныхъ дробей.

а. Сложеніе десятичныхъ дробей имѣетъ ту выгоду предъ сложеніемъ простыхъ дробей, что оно не нуждается даже въ приведеніи ихъ къ одному знаменателю: здѣсь просто слагаются, напримѣръ, тысячныя съ тысячными, сотыя съ сотыми, десятыя съ десятыми, и изъ частныхъ суммъ составляется одна общая. Разовьемъ это въ примѣрахъ.

У. Что составляетъ 2, 7 и 0, 39?

Учен. 3, 09. Смѣшанное число 2, 7 = 2 + 0, 7, 0, 39 = 0, 3 + 0, 09; 0, 7 = 0, 3 = 10 десятымъ или одному цѣлому. Итакъ, 2 + 1 + 0, 09 = 3, 09.

У. Сложите дроби: 0, 028, 0, 95 и 0, 8.

Учен. 0, 028 = 0, 02 + 0, 008; 0, 95 = 0, 9 + 0, 05; 0, 9 + 0,8 = 17 десятымъ = 1, 7; 0, 02 + 0, 05 = 0, 07; 1, 7 + 0, 07 = 1, 77; 1, 77 + 0, 008 = 1, 778.

У. Какъ вы поступали въ исчисленіи?

Учен. Мы сперва сложили десятыя доли во всѣхъ трехъ данныхъ слагаемыхъ, что и составило всего 17 десятыхъ, или 1 цѣлое 7 десятыхъ; потòмъ сложили вмѣстѣ сотыя, и получили всего 7 сотыхъ; сумму сотыхъ приложили къ суммѣ десятыхъ частей, и нашли 1, 77; наконецъ, къ общей суммѣ прибавали еще 8 тысячныхъ. Такимъ образомъ и получили въ общей суммѣ всего 1, 778.

У. Можно ли было бы начать сложеніе съ мѐньшихъ частей, и потòмъ восходить постепенно къ большимъ?

Учен. Конечно можно: въ этомъ случаѣ мы поступили бы точно такъ, какъ поступаемъ при сложеніи цѣлыхъ чиселъ, т. е. отъ сложенія единицъ переходимъ къ сложенію десятковъ, отъ десятковъ къ сотнямъ, и т. д.

У. Какъ надобно поступить для удобности исчисленія при сложеніи нѣсколькихъ десятичныхъ дробей, выраженныхъ большими числами?

Учен. Также, какъ и при сложеніи большихъ цѣлыхъ чиселъ, а именно: подписать одну десятичную дробь подъ другою такъ, чтобы цифры, выражающія однородныя части, находились въ одномъ вертикальномъ ряду; провести подъ послѣднимъ слагаемымъ черту, и потомъ складывать каждый разъ однородныя части, начиная съ самыхъ меньшихъ частей, т. е. съ цифръ, всего далѣе отстоящихъ отъ запятой.

У. Если сумма какого-либо ряда превзойдетъ число десять, то что слѣдуетъ въ такомъ случаѣ написать подъ чертою въ томъ ряду?

Учен. Если отъ сложенія какого-либо ряда однородныхъ частей, положимъ сотыхъ, произойдетъ число болѣе 9, положимъ 13, то это явный знакъ, что въ этой суммѣ содержится одна или нѣсколько частей непосредственно высшаго разряда, которыя потому и должно отнести къ принадлежащему имъ разряду. Такъ въ 13 сотыхъ содержатся 10 сотыхъ и еще 3 сотыя; но $^{10}/_{100}$ все равно, что $^{1}/_{10}$, поэтому $^{1}/_{10}$ должно присовокупить къ частямъ слѣдующаго высшаго разряда, а подъ чертою въ ряду сотыхъ поставить только 3.

У. Найдите сумму дробей: 0, 27+1, 7+0, 0073 + 53, 67891 + 0, 1236769.

Учен. Подписываемъ сперва одну дробь подъ другую такимъ образомъ, чтобы однородныя части всегда находились въ одномъ вертикальномъ ряду; подъ послѣднимъ слагаемымъ проводимъ черту, и начинаемъ складывать съ перваго ряда отъ правой руки къ лѣвой, какъ при сложеніи цѣлыхъ чиселъ. Дѣйствіе расположится такъ:

```
 0, 27
 1, 7
 0, 0073
53, 67891
 0, 1236769
-----------
55, 7798869
```

Рѣшеніе. Девять десяти-милліонныхъ частей перваго ряда съ правой руки пишемъ подъ чертою (въ седьмомъ ряду отъ запятой) безъ всякаго измѣненія, потому что въ прочихъ слагаемыхъ дробяхъ нѣтъ однородныхъ съ ними частей; тоже самое дѣлаемъ и съ 6 милліонными, которыя займутъ мѣсто съ лѣвой стороны десяти-милліонныхъ частей. 1 стотысячная четвертой слагаемой дроби и 7 сто-тысячныхъ пятой слагаемой дроби составляютъ вмѣстѣ 8 сто-тысячныхъ, которыя и пишутся подъ чертою съ лѣвой руки цифры 6. Десяти-тысячныхъ частей во всѣхъ числахъ 18 (3 + 9 + 6); но 18 десяти-тысячныхъ все равно, что 1 тысячная и 8 десяти-тысячныхъ; слѣдственно, подъ чертою въ четвертомъ ряду пишемъ только 8, а 1 тысячную удерживаемъ въ умѣ для присовокупленія къ

тысячнымъ. Тысячныхъ частей во всѣхъ дробяхъ всего также 18 (7 + 8 + 3), къ которымъ если присовокупить 1 тысячную, происшедшую отъ совокупленія десяти-тысячныхъ, то выйдетъ 19 тысячныхъ, или 1 сотая и 9 тысячныхъ. Итакъ, подъ чертою, въ третьемъ ряду отъ запятой, должно написать 9, а 1 сотую удержать въ умѣ. По сложеніи сотыхъ (7 + 7 + 2) вмѣстѣ съ удержанною въ умѣ сотою, узнаемъ, что сотыхъ выйдетъ всего 17, или 1 десятая и 7 сотыхъ. 7 сотыхъ подписываемъ подъ сотыми, а 1 десятую удерживаемъ въ умѣ. Всего десятыхъ, вмѣстѣ съ полученною отъ сложенія сотыхъ, получится 17, или, что все равно, 7 десятыхъ и 1 цѣлое. Слѣдственно, подъ чертою въ ряду десятыхъ пишемъ цифру 7, но какъ тутъ кончаются десятичныя части, то предъ цифрою 7 ставимъ запятую. Теперь переходимъ къ сложенію цѣлыхъ, которыхъ всего вмѣстѣ съ полученною отъ десятичныхъ частей, 55; эту сумму ставимъ съ лѣвой стороны запятой.

Очевидно, что сложеніе десятичныхъ дробей ничѣмъ не разнствуетъ отъ сложенія цѣлыхъ чиселъ.

В. Тоже можно сказать и о вычитаніи десятичныхъ дробей. Два, три примѣра лучше всего объяснятъ дѣло.

У. Что останется, если изъ 2, 53 вычесть 1. 47?

Учен. Останется 1,06. Въ этомъ примѣрѣ изъ 5 десятыхъ и 3 сотыхъ требуется вычесть 4 десятыхъ и 7 сотыхъ; такъ какъ 7 сотыхъ болѣе 3

сотыхъ, то чтобъ возможно было произвести вычитаніе, отъ 5 десятыхъ займемъ одну десатую, обратимъ её въ сотыя, и приложимъ послѣднія къ 3 сотымъ вычитаемаго числа. 13 сотыхъ — 7 сотыхъ = 6 сотымъ; 4 десятыхъ — 4 десятыхъ — 0; да кромѣ того вычтя изъ двухъ единицъ одну, получимъ въ остаткѣ 1. Сложивъ теперь всѣ остатки, получимъ 1 + 0,6 или 1,06.

У. Вычтите изъ 3,7 смѣшанное число 1,895.

Учен. Прежде всего приведемъ обѣ дроби къ одинакому знаменателю, что и будетъ сдѣлано, если по правую сторону цифры 7 уменьшаемаго числа припишемъ два нуля (черезъ что, какъ извѣстно, дробь измѣнитъ только видъ свой, а не величину). Но какъ изъ 7 тысячныхъ, нельзя вычесть 895 тысячныхъ, то отъ 3 цѣлыхъ занимаемъ единицу и приводимъ её въ тысячныя: 1 единица = 1000 тысячнымъ. 1000 тысячныхъ + 700 тысячныхъ = 1700 тысячнымъ. Итакъ, 3,7 = 2 единиц. + 1700 тысячнымъ, а 1700 тысячныхъ можно разложить еще и такъ: 1600 тысяч. + 90 тысячныхъ + 10 тысячныхъ. Отсюда легко теперь вычесть 5 тысяч. + 90 тысяч. + 800 тысячныхъ. Очевидно, что въ остаткѣ получится 5 тысячныхъ и 800 тысячныхъ, или 8 десятыхъ, т. е. 0,805; но какъ при вычитаемой дроби находится еще 1, то полный остатокъ будетъ равенъ 1,805. Дѣйствіе это письменно должно произвести такимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 3{,}700 \\ 1{,}895 \\ \hline 1{,}805 \end{array}$$

т. е. здѣсь наблюдается совершенно тотъ же порядокъ, какъ и при вычитаніи цѣлыхъ чиселъ.

Примѣръ.

a, Изъ 87 вычесть 59, 617.

$$\begin{array}{r} 87,000 \\ 59,617 \\ \hline 27,383. \end{array}$$

b, Изъ 23 вычесть 0, 0359.

$$\begin{array}{r} 23;0000 \\ 0,0359 \\ \hline 23,9641. \end{array}$$

c, Изъ суммы чиселъ: 2, 3765 + 0,9 + 17, 205 + 0,01 вычесть сумму чиселъ: 3, 987 + 2, 0039 + 1, 234567.

$$\begin{array}{r} 2,3765 \\ 0,9 \\ 17,205 \\ 0,01 \\ \hline 20,4915 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20,491500 \\ 7,225467 \\ \hline 13,266033 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3,987 \\ 2,0039 \\ 1,234567 \\ \hline 7,225467 \end{array}$$

N° 61. ЧЕТВЕРТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Умноженіе десятичныхъ дробей.

Здѣсь должно разсмотрѣть три случая: 1, *умноженіе дроби на цѣлое число;* 2, *умноженіе цѣлаго числа на дробь, и* 3, *умноженіе дроби на дробь.*

α. Умноженіе десятичной дроби, или цѣлаго числа съ десятичною дробью, на цѣлое число.

1. Умножить дробь 0, 2 на 2, 3, 4, 5, 6, 7 и т. д. значитъ увеличить $^2/_{10}$ въ 2, 3, 4, 5, 6, 7 разъ и т. д. Отсюда получаемъ произведенія: $^4/_{10}$, $^6/_{10}$,

$^{8}/_{10}$, $^{10}/_{10}$, $^{12}/_{10}$, $^{14}/_{10}$ и т. д., которыя безъ знаменателей выражаются такъ: 0, 4; 0, 6; 0, 8; 1, 0; 1, 2; 1, 4; и т. д. Сравнивая между собою полученныя произведенія со множимымъ дробнымъ числомъ, находимъ, что

0, 4 вдвое > 0, 2
0, 6 втрое > 0, 2
0, 8 вчетверо > 0, 2
1 впятеро > 0, 2
1, 2 вшестеро > 0, 2
1, 4 всемеро > 0, 2 и т. д.

т. е. мы получимъ *искомыя* числа одно за другимъ, если каждый разъ числителя дроби увеличимъ во столько разъ, сколько единицъ во множителѣ, и полученное такимъ образомъ произведеніе уменьшимъ въ 10 разъ. Такъ 0,8 (происшедшее отъ умноженія 0,2 на 4) есть тоже, что $\frac{4 \times 2}{10}$.

2. Умножить дроби: 0, 3 ($^{3}/_{10}$), 0, 4 ($^{4}/_{10}$), 0, 5 ($^{5}/_{10}$), 0, 6 ($^{6}/_{10}$), 0, 7 ($^{7}/_{10}$), 0, 8 ($^{8}/_{10}$), 0, 9 ($^{9}/_{10}$), на 2, 3, 4, 5, 6, 7 и т. д. значитъ тоже, что увеличить ихъ числителей въ 2, 3, 4, 5, 6, 7 разъ и т. д.

Это можно представить послѣдовательными рядами:

1, 0, 3×2=0, 6	2, 0, 4×2=0, 8	3, 0, 5×2=1,
0, 3×3=0, 9	0, 4×3=1, 2	0, 5×3=1, 5
0, 3×4=1, 2	0, 4×4=1, 6	0, 5×4=2,
0, 3×5=1, 5	0, 4×5=2,	0, 5×5=2, 5
0, 3×6=1, 8	0, 4×6=2, 4	0, 5×6=3,
0, 3×7=2, 1	0, 4×7=2, 8	0, 5×7=3, 5
и т. д.	и т. д.	и т. д.

4, $0,6 \times 2 = 1,2$
$0,6 \times 3 = 1,8$
$0,6 \times 4 = 2,4$
$0,6 \times 5 = 3,$
$0,6 \times 6 = 3,6$
$0,6 \times 7 = 4,2$
и т. д.

5, $0,7 \times 2 = 1,4$
$0,7 \times 3 = 2,1$
$0,7 \times 4 = 2,8$
$0,7 \times 5 = 3,5$
$0,7 \times 6 = 4,2$
$0,7 \times 7 = 4,9$
и т. д.

6, $0,8 \times 2 = 1,6$
$0,8 \times 3 = 2,4$
$0,8 \times 4 = 3,2$
$0,8 \times 5 = 4,$
$0,8 \times 6 = 4,8$
$0,8 \times 7 = 5,6$
и т. д.

7, $0,9 \times 2 = 1,8$
$0,9 \times 3 = 2,7$
$0,9 \times 4 = 3,6$
$0,9 \times 5 = 4,5$
$0,9 \times 6 = 5,4$
$0,9 \times 7 = 6,3$
и т. д.

У. Въ предложенныхъ рядахъ, какія части единицы увеличиваются въ 2, 3, 4, 5 разъ и т. д?

Учен. Десятыя.

У. А какія части получаются въ произведеніи?

Учен. Тоже десятыя.

У. Слѣдственно, умножить, напримѣръ, 0, 3 на 2 все равно, что умножить 3 на 2 и потомъ показать, что произведеніе 6 не есть цѣлое число, а выражаетъ десятыя части, т. е. предъ 6 должно поставить нуль съ запятою, вотъ такъ: 0, 6. Умножить 0, 3 на 8 все тоже, что умножить 3 на 8, и полученное произведеніе уменьшить въ 10 разъ; т. е. $0,3 \times 8 = \frac{3 \times 8}{10} = 2,4$.

Задача. Умножить 0, 7 на 13.

Рѣшеніе. Умножить 0, 7 на 13 все тоже, что 7 десятыхъ взять 13 разъ; оттого въ произведеніи

должны произойти тоже десятыя части. Итакъ, просто помножаемъ 7 на 13, что дастъ 91. Но черезъ это получили въ произведеніи въ десять разъ большее число, нежели какое должно быть, ибо не 7 един., а 7 десятыхъ множатся на 13. Поэтому, 91 не есть цѣлое число, а выражаетъ только десятыя части. Чтобы показать это, ставимъ запятую между цифрами 9 и 1, вотъ такъ: 9, 1. Дѣйствительно, $^7/_{10} \times 13 = ^{91}/_{10} = ^{90}/_{10} + ^1/_{10} = 9\ ^1/_{10} = 9,1$.

У. Во всѣхъ произведеніяхъ предыдущихъ рядовъ, по скольку находимъ десятичныхъ знаковъ?

Учен. По одному.

У. Т. е. по стольку, сколько ихъ находится въ каждомъ множимомъ числѣ.

Задача. Помножить 4, 7 на 12.

Рѣшеніе. 4, 7 все тоже, что 47 десятыхъ; увеличивъ 47 десятыхъ въ 12 разъ, получаемъ 564 десятыя, или 56 цѣлыхъ 4 десятыхъ, т. е. 56, 4.

Тотъ же результатъ получимъ, если, *не обращая вниманія на запятую, примемъ оба числа за цѣлыя, умножимъ ихъ одно на другое, и въ полученномъ произведеніи (564) отдѣлимъ запятою, отъ правой руки къ лѣвой, одну цифру для десятичныхъ долей, т. е. столько, сколько находится десятичныхъ знаковъ во множимомъ числѣ.*

3. Умножить дроби: 0, 01 ($^1/_{100}$) | 0, 02 ($^2/_{100}$) 0, 03 ($^3/_{100}$) | 0, 04 ($^4/_{100}$) и т. д. на 2, 3, 4, 5, 6, 7 и т. д. значитъ увеличить ихъ числителей въ 2, 3, 4, 5, 6, 7 разъ и т. д..

Представимъ полученныя произведенія послѣдовательными рядами:

1,	$0,01 \times 2 = 0,02$	9, $0,09 \times 2 = 0,18$
	$0,01 \times 3 = 0,03$	$0,09 \times 3 = 0,27$
	$0,01 \times 4 = 0,04$	$0,09 \times 4 = 0,36$
	и т. д.	$0,09 \times 5 = 0,45$
2,	$0,02 \times 2 = 0,04$	$0,09 \times 6 = 0,54$
	$0,02 \times 3 = 0,06$	$0,09 \times 7 = 0,63$
	$0,02 \times 4 = 0,08$	$0,09 \times 8 = 0,72$
	и т. д.	$0,09 \times 9 = 0,81$
		$0,09 \times 10 = 0,90$
		$0,09 \times 11 = 0,99$
		$0,09 \times 12 = 1,08$ и проч.

У. Въ приведенныхъ рядахъ какія части увеличиваются?

Учен. Сотыя.

У. А въ произведеніяхъ какія части получаются?

Учен. Тоже сотыя.

У. Точно такъ! напримѣръ, умножить 0,09 на 9 все равно, что повторить $^9/_{100}$ девять разъ. Очевидно, что получимъ 81 сотую.

Задача. Найти произведеніе 0, 17 на 13.

Рѣшеніе. 17 сотыхъ, увеличенныя въ 13 разъ, даютъ 221 сотую, а это все равно, что $^{200}/_{100} + ^{21}/_{100}$ или 2 ц. $^{21}/_{100}$, или 2, 21. Тотъ же результатъ получимъ, если, *не обращая вниманія на запятую, примемъ оба числа* (здѣсь 17 и 13) *за цѣлыя, умножимъ ихъ одно на другое, и въ полученномъ произведеніи* (221) *отдѣлимъ запятою, отъ правой руки къ лѣвой, двѣ цифры для десятичныхъ долей, т. е. столько, сколько находится десятичныхъ знаковъ во множимомъ числѣ.*

Примѣры.

$0,23 \times 15 = ?$

$4,05 \times 19 = ?$

$15,01 \times 213 = ?$

Задача. Умножить 0, 009 на 18.

Рѣшеніе. Умножаемъ 9 на 18, не обращая никакого вниманія на запятую, и полученное произведеніе уменьшаемъ въ 1000 разъ, потому что не 9 единицъ, а 9 десятыхъ частей слѣдовало умножить на 18. Итакъ, произведеніе 162 въ 1000 разъ болѣе настоящаго. Чтобы показать, что число 162 означаетъ тысячныя части, пишемъ такъ: 0, 162.

Примѣры.

$0,003 \times 198 = ?$
$0,132 \times 17 = ?$
$4,596 \times 35 = ?$
$0,00009 \times 142 = ?$
$0,20546 \times 11 = ?$
$8,1234567 \times 92 = ?$

Изъ всѣхъ приведенныхъ примѣровъ выводимъ правило:

Чтобъ умножить десятичную дробь, или цѣлое число съ десятичною дробью, на цѣлое число, должно множимое принять за цѣлое, т. е. не обращать вниманія на запятую, и потомъ поступать по правиламъ умноженія цѣлыхъ чиселъ; наконецъ, въ полученномъ произведеніи отдѣлить отъ правой руки къ лѣвой столько знаковъ для десятичной дроби, сколько ихъ находится во множимомъ числѣ.

β. Умноженіе цѣлаго числа на десятичную дробь, или на цѣлое число съ десятичною дробью.

Задача 1. *Умножить* 29 *на* 0, 15.

Рѣшеніе. Не обращая вниманія на запятую, принимаемъ множителя за цѣлое число, и умножаемъ 29 на 15, что и дастъ въ произведеніи 435. Но произведеніе 435 во столько разъ бо-

лѣе произведенія 29 на 0, 15, во сколько разъ число 15 болѣе 0, 15, т. е. въ 100 разъ. Итакъ, чтобы получить искомое произведеніе, должно число 435 уменьшить во 100 разъ, иливсе тоже, отдѣлить въ немъ, отъ правой руки къ лѣвой, двѣ цифры для десятичной дроби. Слѣдственно, $29 \times 0,15 = 29 \times \frac{15}{100} = \frac{435}{100} = 4 \frac{35}{100} = 4,35$.

Задача 2. *Найти произведеніе двухъ чиселъ*: 78 *на* 0, 0009.

Рѣшеніе. 78 надобно умножить на 9, и полученное произведеніе уменьшить въ 10000 разъ; потому что 9 въ 10000 разъ болѣе дроби 0,0009. Дѣйствіе располагается такъ:

$$\begin{array}{r} 78 \\ 0,0009 \\ \hline 0,0702 \end{array}$$

Произведеніе 78 на 9 = 702; но его надобно уменьшить въ 10000 разъ; слѣдственно, занятую должно поставить черезъ 4 цифры отъ правой руки къ лѣвой. Но какъ въ числѣ 702 только три цифры, то дабы запятая стояла на своемъ мѣстѣ, предъ цифрою 7 поставимъ нуль.

Задача 3. *Умножить* 519 *на* 3, 081.

Рѣшеніе. Дѣйствіе изображается въ такомъ видѣ:

$$\begin{array}{r} 519 \\ 3,081 \\ \hline 519 \\ 4152 \\ 1557 \\ \hline 1599,039 \end{array}$$

Множитель $3,081 = \frac{3081}{1000}$. Поэтому, по умноженіи числа 519 на 3081, полученное произведеніе должно уменьшить въ 1000 разъ. Мы достигнемъ этого, если въ найденномъ произведеніи

отдѣлимъ, отъ правой руки къ лѣвой, три знака для десятичной дроби, т. е. столько, сколько ихъ находится во множителѣ.

Изъ предложенныхъ задачъ выводимъ правило: *Чтобъ умножить цѣлое число на десятичную дробь, или на цѣлое число съ десятичною дробью, должно множителя принять за цѣлое число; потомъ, по нахожденіи произведенія изъ двухъ данныхъ цѣлыхъ чиселъ, отдѣлить отъ послѣдняго столько десятичныхъ знаковъ, отъ правой руки къ лѣвой, сколько ихъ находится во множителѣ.*

γ. Умноженіе десятичной дроби, или цѣлаго числа съ десятичною дробью, на десятичную, или на цѣлое число съ десятичною дробью.

Задача 1. *Умножить* 0, 7 *на* 0, 9.

Рѣшеніе. $0,7=\frac{7}{10}$; $0,9=\frac{9}{10}$; $\frac{7}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{63}{100}=0,63$. Ясно, что если вмѣсто 0, 7 возмемъ 7 единицъ, а вмѣсто 0,9-9 единицъ, то, какъ множимое такъ и множитель, будутъ увеличены въ 10 разъ. Значитъ, что произведеніе изъ 7 на 9, т. е. 63 болѣе настоящаго въ 10×10 или въ 100 разъ. Поэтому, чтобы получить настоящее произведеніе, необходимо число 63 уменьшить въ 100 разъ, что и сдѣлается, если въ числѣ 63 отдѣлимъ отъ правой руки къ лѣвой два десятичныхъ знака, вотъ такъ: 0, 63.

Задача 2. *Умножить* 0, 014 *на* 0, 19.

$$\begin{array}{r} 0,014 \\ 0,19 \\ \hline 126 \\ 14 \\ \hline 0,00266 \end{array}$$

Рѣшеніе. $0,014=\frac{14}{1000}$; $0,19=\frac{19}{100}$; $\frac{14}{1000}\times\frac{19}{100}=\frac{266}{100000}=0,00266$. Принимая множимое за цѣлое, получаемъ 14 единицъ; принимая такимъ же образомъ множителя за цѣлое, получаемъ 19 единицъ; $14\times19=266$. Но

14 единицъ въ 1000 разъ болѣе дроби 0, 014; 19 ед. въ 100 разъ болѣе дроби 0, 19. Отсюда видно, что взятые нами сомножители болѣе настоящихъ, одинъ въ 1000 разъ, а другой въ 100 разъ; слѣдственно, и произведеніе 266 болѣе настоящаго въ 100×1000 разъ. Значитъ, чтобы получить настоящее произведеніе, надобно число 266 уменьшить въ 100000 разъ, чего и достигнемъ, если отдѣлимъ въ немъ пять десятичныхъ знаковъ, т. е. *столько, сколько ихъ находится во множимомъ и множителѣ.* Разумѣется, что въ предлежащемъ примѣрѣ, для полученія требуемаго, надобно между нулемъ съ запятою и числомъ 266 вставить два нуля.

Задача 3. Умножить 9, 123 *на* 4, 015.

```
   9, 123
   4, 015
  -------
  456 15
   9123
364 92
---------
36, 6288 45
```

Наконецъ, изъ сихъ и подобныхъ имъ примѣровъ учитель выводитъ слѣдующее общее правило:

Чтобъ умножить десятичную дробь, или цѣлое число съ десятичною дробью, на десятичную, или на цѣлое число съ десятичною дробью, надобно оба числа принять за цѣлыя (т. е. не обращать вниманія на запятыя), и помножить ихъ одно на другое по правиламъ цѣлыхъ чиселъ. Потомъ въ полученномъ произведеніи отдѣлить запятою столько десятичныхъ знаковъ, отъ правой руки къ лѣвой, сколько ихъ всего находится въ обоихъ данныхъ сомножителяхъ.

N° 62. ПЯТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Дѣленіе десятичныхъ дробей.

При дѣленіи десятичныхъ дробей также три случая имѣютъ мѣсто, а именно: 1, дѣленіе десятичной дроби, или цѣлаго числа съ десятичной дробью, на цѣлое число; 2, дѣленіе цѣлаго числа на десятичную дробь, или на цѣлое число съ десятичною дробью, и 3, дѣленіе десятичной дроби, или цѣлаго числа съ десятичною дробью, на десятичную дробь, или на цѣлое число съ дробью.

Такъ какъ дѣленіе десятичныхъ дробей болѣе прочихъ дѣйствій затрудняетъ учениковъ, то и постараемся изложить его подробнѣе.

α. Дѣленіе десятичной дроби, или цѣлаго числа съ десятичной дробью, на цѣлое число.

a. 1. *Раздѣлить* 0, 486 *на* 2.

У. Раздѣлить 0, 486 на 2 все тоже, что раздѣлить на 2 сперва 4 десятыя, потòмъ 8 сотыхъ и наконецъ 6 тысячныхъ. Что составляетъ половина отъ 4 десятыхъ?

Учен. Двѣ десятыя.

У. А половина 8 сотыхъ?

Учен. 4 сотыя.

У. Чему равна половина 6 тысячныхъ?

Учен. 3 тысячныхъ.

У. Итакъ, сколько составляетъ половина 0, 486?

Учен. 243 тысячныя.

У. Дѣйствіе располагается въ цифрахъ такъ:

$$0,486 = 0,4 + 0,08 + 0,006.$$

$$0,4 : 2 = 0,2$$

$$0,08 : 2 = 0,04$$

$$\underline{0,006 : 2 = 0,003}$$

слѣд. $0,486 : 2 = 0,243$

У. Полученное частное равно 243 тысячнымъ. Черезъ раздѣленіе какого числа на 2 получаемъ въ частномъ 243.

Учен. Числа 486.

У. Поэтому ясно, чтобы дробь 0,486 раздѣлить на 2, стòитъ только числителя ея, или число 486, раздѣлить на 2.

У. Какія же части получаются въ частномъ?

Учен. Тѣже самыя, какія означены въ дѣлимомъ, а именно: тысячныя.

У. Какъ выражаются цифрами 243 тысячныя?

Учен. Черезъ 0,243.

2. *Раздѣлить дробь* 0,963 *на* 3.

Рѣшеніе.

$$0,963 : 3 = \begin{cases} 0,9 : 3 = 0,3 \\ 0,06 : 3 = 0,02 \\ 0,003 : 3 = 0,001 \end{cases}$$

$$0,963 : 3 = 0,321$$

У. Сколько составляетъ третья часть 963 тысячныхъ?

Учен. 321 тысячную.

У. На какое число надобно раздѣлить 3, чтобы получить въ частномъ 321?

Учен. На число 963.

У. Поэтому, раздѣлить данную дробь 0,963 на 3, все равно, что раздѣлить на 3 какое число?

Учен. Числителя данной дроби, или число 963.

У. Съ чѣмъ же имѣемъ дѣло при дѣленіи десятичной дроби на цѣлое число?

Учен. Съ однимъ числителемъ: съ которымъ поступаемъ какъ съ дѣлимымъ при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ.

У. Значитъ, что на нуль и запятую не обращается никакого вниманія при дѣленіи десятичной дроби на цѣлое число; однако нуль и запятая не имѣютъ ли какого нибудь значенія для частнаго?

Учен. Они показываютъ какимъ образомъ должно читать число, получаемое въ частномъ.

У. Еслибъ передъ числомъ 463 не стояло нуля съ запятою, чтобы тогда означало частное?

Учен. 321 единицу.

У. А теперь что означаетъ?

Учен. 321 тысячную.

Ѣ. 1. *Раздѣлить 2, 484 на 4.*

Рѣшеніе. 2, 484 все равно, что 2484 тысячныя ($\frac{2484}{1000}$); четвертая часть 2484 тысячныхъ = 621 тысячной. Итакъ, раздѣляемъ число 2484 (принявъ его за цѣлое) на 4, и полученнымъ частнымъ, 621, означаемъ тысячныя доли, т. е. пишемъ такъ: 0, 621. Принявъ дѣлимое за цѣлое, мы увеличили его въ тысячу разъ противъ даннаго; поэтому и частное, полученное отъ раздѣленія 2484 на 4, также въ тысячу разъ болѣе настоящаго, ибо при томъ же дѣлителѣ, во сколько разъ увеличится дѣлимое, во столько разъ увеличится и частное. Въ предложенномъ примѣрѣ, во столько разъ надобно уменьшить частное 621, во сколько разъ было увеличено дѣлимое, т. е. въ тысячу разъ, — что и сдѣлается, если въ полученномъ частномъ (621) отдѣлимъ, отъ правой руки къ лѣвой, столько знаковъ для десятичной дроби, сколько находится десятичныхъ знаковъ въ дѣлимомъ.

Другое рѣшеніе.

$$2,484 : 4 = 0,621.$$

Требуется 2 цѣлыя, 4 десятыя, 8 сотыхъ и 4 тысячныя раздѣлить на 4. Четвертая часть 2 цѣлыхъ менѣе 1; поэтому, 2 цѣлыя приводимъ въ десятыя доли; 2 ц. = 20 десятымъ; 20 десятыхъ + 4 десятыя = 24 десятымъ. $\frac{1}{4}$ отъ 24 десятыхъ = 6 десятымъ. Итакъ, пишемъ въ частномъ 6; для показанія же того, что этою цифрою означается не 6 един., а 6 десятыхъ, ставимъ передъ нею нуль съ запятою. Четвертая часть 8 сотыхъ = 2 сотымъ. Цифру 2 ставимъ въ частномъ непосредственно за цифрою 6: стоя́ на второмъ мѣстѣ послѣ запятой слѣва въ право, она и будетъ означать сотыя доли единицы. Наконецъ, четвертая часть 4 тысячныхъ = 1 тысячной, которую и ставимъ въ частномъ за цифрою 2. Слѣдственно, $\frac{1}{4}$ числа 2,484 = 0,621.

Отсюда видно, что при дѣленіи десятичной дроби на цѣлое число, важнѣе всего дать въ частномъ надлежащее значеніе первой цифрѣ послѣ запятой; значеніе же послѣдующихъ за нею цифръ частнаго опредѣлится потомъ само собою.

2. *Раздѣлить* 0,0611 *на* 13.

Рѣшеніе. Если въ дѣлимомъ нѣтъ цѣлыхъ, то ихъ не можетъ быть и въ частномъ; если въ дѣлимомъ нѣтъ десятыхъ, то и въ частномъ также не можетъ быть десятыхъ, ибо частное должно изображать $\frac{1}{13}$ дѣлимаго. $\frac{1}{13}$ отъ 6 сотыхъ не составляетъ ни одной сотой; поэтому въ частномъ не будетъ также и *сотыхъ.* Итакъ, обращаемъ 6 сотыхъ въ тысячныя, и прилагаемъ къ нимъ 1 тысячную дѣлимаго, черезъ что получаемъ всего 61 тысячную. Раздѣливъ 61 на 13, получаемъ въ частномъ 4 и въ остаткѣ 9. Полученная для частнаго цифра 4 означаетъ *тысячныя* доли. Чтобы показать это, ставимъ передъ 4 два нуля, потомъ запятую и еще нуль. Нуль передъ запятою

замѣнить отсутствіе цѣлыхъ чиселъ, два же нуля между запятою и цифрою 4-отсутствіе десятыхъ и сотыхъ долей единицы. Происшедшій отъ дѣленія остатокъ, именно 9 тысячныхъ, приводимъ въ десяти-тысячныя доли, прилагаемъ къ нимъ 1 десяти-тысячную дѣлимаго, сумму раздѣляемъ на 13, и находимъ вторую цифру частнаго, именно 7, которую и пишемъ за цифрою 4. Слѣдственно, 0,0611 : 13= 0,0047.

c. *Раздѣлить* 1, 7269 *на* 45.

Первое рѣшеніе. 1 един. дѣлимаго не можетъ быть раздѣлена на-цѣло на дѣлителя 45; поэтому, 1 дѣлимаго приводимъ въ десятыя, прилагаемъ къ послѣднимъ 7 десятыхъ дѣлимаго, и получаемъ всего 17 десятыхъ. Но это число десятыхъ также на-цѣло не дѣлится на 45. Приводимъ его въ сотыя: 1, 7 или 17 десятыхъ = 170 сотымъ. 170 сотыхъ+2 сотыхъ (третья цифра дѣлимаго) составляютъ 172 сотыя. Раздѣливъ 172 сотыя на 45, получаемъ на каждую часть по 3 сотыя и еще въ остаткѣ 37 сотыхъ. Чтобы показать что цифра 3, полученная для перваго частнаго, означаетъ 3 сотыя, ставимъ передъ нею два нуля, изъ которыхъ одинъ отдѣляемъ запятою, вотъ такъ: 0, 03. Къ 37 сотымъ или 370 тысячнымъ остатка прилагаемъ 6 тысячныхъ (четвертую цифру дѣлимаго), и получаемъ всего 376 тысячныхъ. Раздѣляемъ послѣднее число также на 45, черезъ что получаемъ для втораго частнаго 8 тысячныхъ и для втораго остатка 16 тысячныхъ. Цифру 8 ставимъ въ частномъ непосредственно за цифрою 3, а 16 тысячныхъ приводимъ въ десяти-тысячныя: 16 тысячныхъ=160 десяти-тысячнымъ; $\frac{160}{10000}+\frac{9}{10000}$ (пятая цифра дѣлимаго) = 169 десяти-тысячнымъ. По раздѣленіи $\frac{169}{10000}$ на 45 получаемъ для частнаго 3 десяти-тысячныя, а въ остаткѣ $\frac{34}{10000}$. Остатокъ $\frac{34}{10000}$ показываетъ, что найденное частное 0,0383 не есть *точная* сорокъ-пятая доля дѣлимаго, а только *прибли-*

женная. Въ самомъ дѣлѣ, частное 0, 0383, будучи помножено на дѣлителя 45, даетъ въ произведеніи 1, 7235, а не 1, 7269. Здѣсь разность между даннымъ дѣлимымъ и полученнымъ произведеніемъ равняется $\frac{34}{10000}$, т. е. остатку происшедшему отъ дѣленія. Чтобы точнѣе опредѣлить частное, надобно остатокъ $\frac{34}{10000}$ обратить въ сто-тысячныя доли, и послѣднія раздѣлить также на 45. Остатокъ $\frac{34}{10000}$=340 сто-тысячнымъ, которыя, будучи раздѣлены на 45, даютъ въ частномъ 7 сто-тысячныхъ и еще въ остаткѣ $\frac{25}{100000}$. Если къ прежнему частному (0, 0383) припишемъ съ правой стороны цифру 7, то получимъ новое частное (0, 03833), которое уже гораздо ближе подходитъ къ настоящему. Продолжая поступать такимъ образомъ, будемъ все болѣе и болѣе приближаться къ настоящему частному, хотя никогда его не достигнемъ.

Представимъ объясненный примѣръ въ цифрахъ.
1, 7269 = 172 сотымъ + 6 тысячн. + 9 десяти-тысячнымъ.

172 (сотыхъ) : 45 = 0, 03..... (первое частное)
въ остаткѣ 37 (сотыхъ)
или 370 (тысяч.)
\+ 6 (тысяч.)
376 (тысяч.) : 45 = 0, 008..... (второе частное)
въ остаткѣ 16 (тысяч.)
или 160 (десяти-тысяч.)
\+ 9 (десяти-тысяч.) : 45 = 0, 0003.. (третье частное)
въ остаткѣ 34 (десяти-тысяч.)
или 340 (сто-тысяч.) : 45 = 0, 00007. (четвертое част.)
въ остаткѣ 25 (сто-тысяч.)
или 250 (милліон.) : 45 = 0, 000005 (пятое частное)
25
и т. д.

Итакъ, 1, 7269... : 45 = 0, 038375 (общее частное)

или сокращенно :

1, 7269 : 45 = 0, 0383755...

376
169
340
250
250
25 и т. д.

Отсюда видно, что какъ бы далеко ни продолжали дѣйствія, никогда не получимъ настоящаго частнаго, ибо въ дѣленіи всегда будемъ имѣть остатокъ.

Это ведетъ насъ къ замѣчанію, что при раздѣленіи десятичной дроби на цѣлое число можетъ иногда произойти въ частомъ *безконечная дробь*. Слѣдственно, десятичныя дроби бываютъ *конечныя* и *безконечныя*.

Второе упрощенное рѣшеніе предыдущей задачи.

Не обращая вниманія на запятую и принявъ данное дѣлимое за цѣлое число, раздѣляемъ, по правиламъ дѣленія цѣлыхъ чиселъ, число 17269 на 45. Отсюда получаемъ въ частномъ 383 и въ остаткѣ 34. Но число 383 не можетъ быть цѣлое, потому что, откинувъ въ дѣлимомъ запятую, мы черезъ то увеличили послѣднее въ 10.000 разъ; значитъ, что и полученное частное въ 10.000 разъ болѣе настоящаго. Слѣдственно, чтобы получить настоящее частное, надобно число 383 уменьшить въ 10.000 разъ, — что и будетъ сдѣлано, если въ немъ, отъ правой руки къ лѣвой, отдѣлимъ запятою столько знаковъ для десятичной дроби, сколько ихъ находится въ дѣлимомъ. Разумѣется, что недостающее число этихъ знаковъ добавляется нулями. Поэтому, настоящее частное = 0, 0383....

Примѣчаніе. Необходимо здѣсь замѣтить, что для полученія точнѣйшаго частнаго, мы прибавляли къ полученному остатку сперва одинъ нуль: поэтому и въ дѣлимомъ черезъ это прибавленіе стало однимъ десятичнымъ знакомъ болѣе противъ прежняго. Раздѣливъ остатокъ 340 на 45, получили новый остатокъ 25, къ которому опять прибавили нуль, т. е. придали лишній десятичный знакъ къ дѣлимому. Въ предыдущемъ примѣрѣ (смотри первое рѣшеніе) прибавлено такимъ образомъ *три* нуля. Ясно, что эти нули должны входить въ соображеніе при счисленіи десятичныхъ знаковъ дѣлимаго. Итакъ, теперь дѣлимое имѣетъ всего 7 десятичныхъ знаковъ, а не 4, какъ было сначала. Значитъ, что и въ полученномъ частномъ 383755 должно, отъ правой руки къ лѣвой, отдѣлить запятою для десятичной дроби всего 7 цифръ, т. е. изобразить его такъ: 0, 0383755.....

Примѣры.

1, 0, 07543 : 127 = ?

2, На какое число надобно умножить 81, чтобы получить въ произведеніи 5, 934141?

3, Опредѣлить 97-ю часть числа 3, 50994.

4, Сколько составляетъ $\frac{1}{11}$ *тринадцатой части* дроби 0, 031? —

Общее правило. Чтобы раздѣлить десятичную дробь, или цѣлое число съ десятичною дробью, на цѣлое, надобно дѣлимое принять за цѣлое (не обращая вниманія на запятую) и производить дѣленіе по правиламъ цѣлыхъ чиселъ; потомъ въ полученномъ частномъ отдѣлить запятою, отъ правой руки къ лѣвой, столько цифръ для десятичной дроби, сколько находится десятичныхъ знаковъ въ дѣлимомъ числѣ, не забывая впрочемъ включать въ это число и тѣ нули, которые были приписываемы къ остаткамъ дѣленія для полученія точнѣйшаго частнаго, когда дѣлимое не дѣлится на-цѣло на дѣлителя.

в. Дѣленіе цѣлаго числа на десятичную дробь, или на цѣлое число съ десятичною дробью.

а. 1. *Раздѣлить 4 на 0, 5.*

Рѣшеніе. Раздѣлить 4 на 0, 5 все тоже, что раздѣлить 40 десятыхъ на 5 десятыхъ, или просто 40 на 5. Итакъ, 4: 0, 5 = 40: 5 = 8. Ясно, чтобы раздѣлить цѣлое число на десятичную дробь, надобно дѣлимое привести въ тѣ же самыя доли, въ какихъ означенъ дѣлитель, и потомъ по правиламъ цѣлыхъ чиселъ дѣлить числителя дѣлимой дроби на числителя дѣлящей.

2. *Сколько разъ 2, 4 содержится въ 12?*

Рѣшеніе. Число 2, 4 = 24 десятымъ, а 12 цѣл. = 120 десятымъ; 24 десятыхъ столько же разъ содержатся въ 120 десятыхъ, сколько разъ 24 содержится въ 120, т. е. 5 разъ. Здѣсь дѣлимое приводится въ десятыя доли потому, что въ нихъ выраженъ дѣлитель.

3. *Раздѣлить 7 на 0, 32.*

Отв. Частное равно $21 \frac{28}{32}$.

Рѣшеніе. Приводимъ дѣлимое въ тѣже самыя доли, въ какихъ выраженъ дѣлитель, т. е. въ сотыя. 7 един. = 700 сотымъ. Поэтому, 7 : 0, 32 = 7,00:0,32 = 700 : 32 = $21 \frac{28}{32}$.

4. *Сколько разъ дробь 0, 09 содержится въ 17?*

Отв. $188\frac{8}{9}$.

Рѣшеніе. 17 един. = 1700 сотымъ; 17,00 : 0,09 = 1700 : 9 = $188\frac{8}{9}$.

Примѣры.

5. 123 : 2, 32 = ?

6. 29 : 0, 1325 = ?

7. 1 : 0, 007 = ?

8. 5 : 0, 000029 = ?

У. Что̀ дѣлаемъ съ дѣлимымъ при раздѣленіи цѣлаго числа на десятичную дробь?

Учен. Приводимъ его въ тѣ же самыя доли, въ какихъ означенъ дѣлитель.

У. А для этого какъ поступаемъ?

Учен. Прибавляемъ съ правой стороны дѣлимаго, отдѣливъ его сперва запятою, столько нулей, сколько находится десятичныхъ знаковъ въ дѣлителѣ.

У. Измѣнится ли черезъ то дѣлимое?

Учен. Оно измѣнится, если по прежнему станемъ считать его за цѣлое, но оно не измѣнится, когда примемъ его за число частей, однородныхъ съ тѣми, въ которыхъ выраженъ дѣлитель. Такъ, приписавъ къ дѣлимому одинъ нуль, мы должны принимать его за число десятыхъ долей цѣлаго; приписавъ два нуля—*за число сотыхъ долей*, и т. д.

У. Послѣ этого видоизмѣненія дѣлимаго какъ поступаемъ?

Учен. Принявъ дѣлимое и дѣлителя за цѣлыя числа, дѣлимъ ихъ одно на другое.

У. Принявъ дѣлимое и дѣлителя за цѣлыя числа, не увеличиваемъ ли черезъ то обоихъ чиселъ?

Учен. Увеличиваемъ, но въ одинакое число разъ, что, какъ извѣстно, не измѣняетъ частнаго.

У. Итакъ, составьте общее правило для дѣленія цѣлаго числа на десятичную дробь, или на цѣлое число съ десятичной дробью.

Учен. *Чтобы раздѣлить цѣлое число на десятичную дробь, или на цѣлое число съ десятичною дробью, должно дѣлимое представить въ видѣ дроби, имѣющей того же знаменателя, какой находится въ дѣлителѣ; т. е. при-*

писать съ правой стороны дѣлимаго столько нулей, сколько въ дѣлителѣ десятичныхъ знаковъ. Потомъ, не обращая вниманія на запятыя, дѣлить оба числа одно на другое по правиламъ цѣлыхъ чиселъ.

Въ примѣрахъ 3-мъ и 4-мъ искомыя частныя выражены въ цѣлыхъ числахъ и обыкновенныхъ дробяхъ; такъ въ 3-мъ примѣрѣ частное равно $21^{28}/_{32}$, а въ четвертомъ $188^{8}/_{9}$. Но еслибъ требовалось въ означенныхъ примѣрахъ опредѣлить частное въ видѣ одной десятичной дроби, то очевидно нужнобъ было дроби $^{28}/_{32}$ и $^{8}/_{9}$ замѣнить имъ равнозначащими десятичными дробами. Здѣсь намъ нужно рѣшить вопросъ *приведенія простыхъ дробей въ десятичныя*, которымъ теперь и займемся.

ь. *Приведеніе простыхъ дробей въ десятичныя.*

Возмемъ снова третій примѣръ, а именно: *раздѣлить 7 на 0, 32.*

У. Какъ мы поступали при раздѣленіи 7 на 0, 32?

Учен. Сперва приводили 7 един. въ сотыя доли, а потомъ сотыя дѣлили на сотыя по правиламъ цѣлыхъ чиселъ. Вотъ такъ: 7 : 0, 32 = 7, 00 : 0, 32 = 700 : 32 = 700 : 32 = 21
28

У. Раздѣливъ 700 сотыхъ на 32 сотыхъ, сколько получили въ частномъ?

Учен. 21.

У. Что здѣсь означаетъ число 21?

Учен. 21 единицу, потому что оно показываетъ *число разъ* содержанія дѣлителя въ дѣлимомъ.

У. Сколько получили въ остаткѣ?

Учен. 28 единицъ?

У. Отчего произошелъ остатокъ?

Учен. Оттого что дѣлитель въ дѣлимомъ не содержится равнаго числа разъ.

У. Сколько бы слѣдовало по крайней мѣрѣ имѣть въ остаткѣ, чтобы въ частномъ получить число единицею болѣе противъ настоящаго?

Учен. По крайней мѣрѣ число 32.

У. Поэтому, хотя по раздѣленіи остатка 28 на дѣлителя 32, нельзя надѣяться получить лишнюю единицу въ частномъ, однако этотъ остатокъ все-таки долженъ быть раздѣленъ на 32 равныя части. Нельзя ли остатокъ привести въ десятичныя доли?

Учен. Можно, и въ такомъ случаѣ вмѣсто 28 единицъ получимъ 280 десятыхъ.

У. Если 280 десятыхъ раздѣлить на 32, то получится ли въ частномъ цѣлое число?

Учен. Нѣтъ, получится извѣстное число десятыхъ.

У. Сколько же получится десятыхъ?

Учен. 8 десятыхъ.

У. Какъ слѣдуетъ ихъ представить въ частномъ?

Учен. За цифрою 1 частнаго, отдѣливъ прежде цѣлое число запятою.

У. Покажите это на дѣлѣ.

Учен. 700 : 32 = 21, 8
280
24

У. Итакъ, чему теперь равно частное?

Учен. 21, 8.

У. Чтò показываетъ это частное?

Учен. Что дѣлитель содержится въ дѣлимомъ 21 разъ и 8 десятыхъ раза.

У. Сколько получено въ остаткѣ?

Учен. 24.

У. Что означаетъ это число?

Учен. Десятыя доли единицы.

У. Чтобы точнѣе опредѣлить частное, какъ должно поступить съ новымъ остаткомъ?

Учен. Полагаемъ, что надобно привести его въ сотыя, и эти сотыя также раздѣлить на 32.

У. Точно такъ! сколько же сотыхъ получится въ частномъ?

Учен. 7 сотыхъ.

```
700 : 32 = 21, 87
 60
  280
   240
    16
```

У. Для точнѣйшаго опредѣленія частнаго, чтò должно сдѣлать съ послѣднимъ остаткомъ, т. е. съ 16 сотыми?

Учен. Привести ихъ въ тысячныя, которыя также раздѣлить на 32.

У. Что получится въ частномъ отъ этого дѣленія?

Учен. 5 тысячныхъ.

У. А въ остаткѣ?

Учен. Ничего.

$$
\begin{array}{l}
700 : 32 = 21,\ 875 \\
\ \ 60 \\
\ \ 280 \\
\ \ \ \ 240 \\
\ \ \ \ \ \ 160 \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ \ 0
\end{array}
$$

У. Слѣдственно, сколько разъ число 32 содержится въ 700?

Учен. 21 разъ и 875 тысячныхъ раза.

У. А при прежнемъ рѣшеніи что̀ получили?

Учен. 21 $^{28}/_{32}$.

У. Поэтому должно быть, что 21 $^{28}/_{32}$ все тоже, что 21, 875.

Учен. Точно такъ; потому что выраженіе 21,875, будучи представлено обыкновенною дробью, есть 21 $^{875}/_{1000}$ или 21 $^{28}/_{32}$.

Примѣръ. Дробь $^3/_4$ обратить въ десятичную.

Рѣшеніе. Такъ какъ на самомъ дѣлѣ число 3 не дѣлится на 4, то въ частномъ не получится ни одного цѣлаго, а только части отъ него. Если къ 3 припишемъ 0, то изъ 3 цѣлыхъ сдѣлаемъ 30 десятыхъ. 30 десятыхъ, раздѣленныя на 4, даютъ въ частномъ 7 десятыхъ, и еще 2 десятыя въ остаткѣ. 2 десятыя остатка все равно, что 20 сотыхъ; 20 сотыхъ : 4 = 5 сотымъ. Слѣдственно, въ частномъ получается всего 75 сотыхъ. Значитъ, что $\frac{3}{4}$ = 0, 75. И дѣйствительно, $\frac{75}{100}$ есть только видоизмѣненіе $\frac{3}{4}$, ибо по сокращеніе дроби $\frac{75}{100}$ на 25, получимъ $\frac{3}{4}$.

Цифрами:

3 : 4

все равно, что 30 десятыхъ : 4

все равно, что 28 десят. + 20 сот. : 4 = 7 десят. + 5 сот. = 0, 75.

Сокращенно:

$$\begin{array}{l} 30 : 4 = 0,75. \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

Изъясненіе. Въ этомъ примѣрѣ вмѣсто дѣлимаго 3 взято 300. Ясно, что дѣлимое увеличено въ 300 разъ; поэтому, для полученія настоящаго частнаго, надобно число 75, найденное для частнаго, уменьшить въ 100 разъ,—что и будетъ сдѣлано, если въ частномъ отдѣлимъ для десятичной дроби двѣ цифры, т. е. *столько, сколько было приписано нулей къ дѣлимому.*

Еще примѣръ. Обратить $^8/_{129}$ *въ десятичную дробь.*

Сокращенное рѣшеніе. Надобно 8 раздѣлить на 129, для этого припишемъ къ 8 два нуля; но не забудемъ, что черезъ эту приписку дѣлимое увеличится во 100 разъ. 800 : 129=6 съ остаткомъ 26. Увеличивъ остатокъ въ 10 разъ, раздѣлимъ его снова на 129, причемъ не забудемъ, что черезъ увеличеніе остатка въ 10 разъ, увеличится и дѣлимое тоже въ 10 кратъ, такъ что теперь дѣлимое увеличено всего въ 1000 кратъ. 260 : 129=2 съ остаткомъ 2. Если послѣдній остатокъ, за малостію его, отбросимъ, то получимъ въ частномъ всего 62. Это частное не есть настоящее, ибо для полученія его дѣлимое было увеличено въ 1000 разъ. Слѣдственно, искомое частное должно быть въ 1000 разъ менѣе 62, т. е. 0, 062.

Примѣры.

Дробь $^5/_{114}$ обратить въ десятичную.

» $^3/_{1394}$ — — — — » — — — — — —

Общее правило. Для обращенія простой дроби въ десятичную, надобно числителя ея раздѣлить на знаменателя; но чтобъ можно было на самомъ дѣлѣ произвести дѣленіе, къ числителю приписываютъ одинъ, два и

вообще столько нулей, чтобъ увеличенный такимъ образомъ числитель могъ содержать въ себѣ знаменателя одинъ или нѣсколько разъ, - черезъ что и получится первая цифра частнаго. Для нахожденія прочихъ цифръ частнаго, надобно съ послѣдовательными остатками поступать такъ же, какъ поступали съ числителемъ. Но какъ черезъ приписаніе къ числителю и остаткамъ каждаго лишняго нуля, дѣлимое увеличивается всякій разъ вдесятеро, то очевидно, что для полученія настоящаго частнаго вмѣсто найденнаго, должно отдѣлить въ послѣднемъ, отъ правой руки къ лѣвой, столько цифръ для десятичной дроби, сколько всего было прибавлено нулей, какъ къ числителю такъ и къ остаткамъ.

Изъ рѣшеній предложенныхъ примѣровъ также легко замѣтить: 1° *что не всякую простую дробь можно точнымъ образомъ обратить въ десятичную,* и 2° *чѣмъ больше десятичныхъ знаковъ получаемъ въ частномъ, тѣмъ больше приближаемъ искомую десятичную дробь къ простой, и тѣмъ меньше становится разность между обѣими.*

γ. Дѣленіе десятичной дроби, или цѣлаго числа съ десятичной дробью, на десятичную, или на цѣлое число съ десятичной дробью.

Послѣ сказаннаго въ предыдущихъ двухъ отдѣлахъ предлежащаго упражненія, этотъ отдѣлъ не требуетъ болѣе никакихъ объясненій. Понятно, *чтобы раздѣлить одну десятичную дробь на другую, должно обѣ привести къ одинакому знаменателю, т. е. уравнять въ нихъ число десятичныхъ знаковъ, и потомъ производить дѣленіе по правиламъ цѣлыхъ чиселъ. Если же въ частномъ, кромѣ цѣлаго числа, получится простая*

дробь, то для полученія вмѣсто ея десятичной, точной или приближенной, надобно поступить такъ, какъ было показано при приведеніи простыхъ дробей въ десятичныя.

Примѣры.

2, 79 : 0, 591 = ?

Рѣшеніе. 2, 79 : 0, 591 = 2, 790 : 0, 591 =
= 2790 : 591 = 4, 7208......
4260
1230
4800
72

0, 21 : 0, 4197 = ?
0, 019 : 14, 5 = ?
2, 7 : 1, 00954 = ?

№ 64. ШЕСТОЕ УПРАЖНЕНІЕ.

Періодическія десятичныя дроби.

Прежде видѣли, что при обращеніи простыхъ дробей въ десятичныя, не всякую простую дробь можно точнымъ образомъ привести въ десятичную. Есть дроби, напримѣръ $^1/_3$, $^2/_{13}$ и проч., которыя можно замѣнить только *приближенными* десятичными дробями. Эти приближенныя дроби названы были нами также *безконечными* по той причинѣ, что какъ бы далеко дѣйствіе дѣленія ни продолжали, никогда не получимъ остатка равнаго нулю. Поэтому, если не каждая простая дробь приводится точно въ десятичную, то рождается обратный вопросъ: *нельзя ли по крайней мѣрѣ для всякой безконечной дроби отыскать ту простую дробь, отъ которой она произошла?*—

Этотъ вопросъ рѣшается положительно, какъ мы сей-часъ увидимъ; но прежде опредѣлимъ, какія изъ простыхъ дробей выражаются конечными десятичными строками и какія безконечными.

а Знаменатели дробей, какъ напримѣръ: $^5/_8$, $^{19}/_{25}$, $^{73}/_{80}$, $^{317}/_{1250}$ и проч., разлагаются на слѣдующихъ первоначальныхъ сомножителей:

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$
$$25 = 5 \times 5$$
$$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$$
$$1250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

Отсюда видно, что во всѣхъ этихъ знаменателяхъ, первоначальные сомножители суть одни и тѣже, именно числа 2 и 5. Но какъ каждый изъ знаменателей десятичныхъ дробей, т. е. числа 10, 100, 1000 и т. д., разлагается на тѣхъ же самыхъ первоначальныхъ сомножителей, взятыхъ одинъ или нѣсколько разъ, то и выходитъ, что простыя дроби, которыхъ знаменатели суть: 8, 25, 80, 1250 и проч. всегда возможно выразить въ конечныхъ десятичныхъ частяхъ.

Дѣйствительно,

$$\frac{5}{8} \times \frac{125}{125} = \frac{625}{1000} = 0,\ 625$$
$$\frac{19}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{76}{100} = 0,\ 76$$
$$\frac{73}{80} \times \frac{125}{125} = \frac{9125}{10000} = 0,\ 9125$$
$$\frac{317}{1250} \times \frac{8}{8} = \frac{2536}{10000} = 0,\ 2536 \text{ и т. д.}$$

Итакъ, *всякая простая дробь, которой знаменатель разлагается лишь на первоначальныхъ сомножителей* 2 *и* 5, *сколько бы разъ ни повторенныхъ, можетъ выразиться конечною десятичною дробью.*

Ѣ. Но превращая дроби $^5/_7$, $^3/_{11}$, $^{19}/_{29}$ и проч., легко примѣтить можно, что онѣ никогда не выразятся точнымъ образомъ въ десятичныхъ доляхъ, потому что на какое бы число ни помножали знаменателей 7, 11, 29 и проч., никогда не получимъ въ произведеніи круглаго числа, какъ то: 10, 100, 1000 и проч. Отсюда общее правило: *всякая простая дробь, которой знаменатель, будучи разложенъ на первоначальныхъ сомножителей, даетъ еще и другія числа, кромѣ 2 и 5, не можетъ быть точнымъ образомъ приведена въ десятичную, такъ что послѣдняя будетъ безконечною дробью.*

Теперь займемся собственно *періодическими* дробями. Пусть для примѣра дана дробь $^1/_7$, которую требуется превратить въ десятичную.

1,0 : 7 = 0, 142857142857........
30
20
60
40
50
10
30
20
60
40
50
10

Здѣсь примѣчаемъ: *во-первыхъ*, что какъ бы далеко дѣйствія дѣленія ни продолжали, никогда не получимъ въ остаткѣ 0; *во-вторыхъ*, каждый изъ

остатковъ, получаемыхъ отъ частныхъ дѣленій, долженъ быть менѣе знаменателя превращаемой дроби, а потому различныхъ остатковъ всегда будетъ менѣе, покрайней мѣрѣ единицею, нежели сколько единицъ въ знаменателѣ. Итакъ, въ предлежащемъ примѣрѣ, гдѣ знаменатель есть 7, число различныхъ остатковъ можетъ быть только 6, а именно: 1, 3, 2, 6, 4, 5. Ясно, что если станемъ продолжать дѣленіе, прежніе остатки будутъ возвращаться, а отъ тѣхъ же самыхъ остатковъ, увеличиваемыхъ въ 10 разъ, необходимо и въ частномъ получатся *послѣдовательно тѣже самыя цифры*, какія получили въ началѣ. Слѣдственно, частное представитъ собою рядъ цифръ, повторяемыхъ въ десятичной дроби въ одномъ и томъ же порядкѣ, что и называется *періодомъ*. Отъ этого и самая десятичная дробь получаетъ названіе *періодической*.

Періодъ можетъ состоять изъ одной, двухъ, трехъ и т. д. цифръ, смотря по числу различныхъ цифръ, въ него входящихъ.

Такъ: 0, 111111...... называется *одночленною* періодическою дробью; 0, 727272...... *двухчленною*; 0, 574574...... *трехчленною*, и т. д.

Вообще всякая безконечная десятичная дробь есть періодическая, хотя бы періодъ ея, по причинѣ большаго числа цифръ, её составляющихъ, и ни былъ замѣченъ.

Періодическія дроби обыкновенно раздѣляются на *чистыя* и *смѣшанныя*. Первыя суть тѣ, въ которыхъ періодъ начинается съ первой цифры послѣ

запятой, а вторыя суть тѣ, въ которыхъ періодъ считается со второй, третьей цифры и т. д.

$$\left.\begin{array}{l} 0,8888\ldots\ldots\ldots \\ 0,019019019\ldots \end{array}\right\}$$ чистыя періодическія дроби.

0, 45272727 .... Здѣсь періодъ начинается съ третьей цифры, а потому эта дробь есть *смѣшанная.*

a. Чистыя періодическія дроби.

Возмемъ нѣсколько періодическихъ дробей, напр.

0, 6666 ....
0, 585858 ....
0, 137137 .... и проч.

и раздѣлимъ каждую изъ нихъ на число, образующее періодъ.

$$0,6666\ldots\ldots\ldots : \ 6 = 0,11111\ldots\ldots$$
$$0,585858\ldots\ldots : \ 58 = 0,010101\ldots\ldots$$
$$0,137137\ldots\ldots : \ 137 = 0,001001\ldots$$

Поэтому,

$$0,6666\ldots\ldots = 6\times0,1111\ldots\ldots\ldots$$
$$0,5858\ldots\ldots = 58\times0,010101\ldots\ldots$$
$$0,137137\ldots\ldots = 137\times0,001001\ldots\ldots$$

Изъ этого можемъ заключить, что *на всякую періодическую дробь можно взирать какъ на произведеніе, состоящее изъ двухъ такихъ сомножителей, изъ которыхъ одинъ есть цѣлое число, образующее періодъ, а другой—періодическая дробь, которой періодомъ служитъ* 1, *или* 1, *предшествуемая однимъ, двумя, тремя и вообще нѣсколькими нулями.*

Обратимъ особое вниманіе на вторыхъ сомножителей разложенныхъ нами періодическихъ дробей.

Они суть:

0, 11111. . . . .
0, 010101. . . . .
0, 001001 . . . .

Всѣ эти дроби весьма сходствуютъ между собою, *и получаются изъ такихъ простыхъ дробей, для которыхъ числителемъ служитъ* 1, *а знаменателемъ цифра* 9, *взятая одинъ, два, три и т. д разъ, сообще столько, сколько въ періодѣ цифръ.*

Въ самомъ дѣлѣ,

$^1/_9 = 0, 1111111. . . . . .$
$^1/_{99} = 0, 010101 . . . .$
$^1/_{999} = 0, 001001 . . . .$

и т. д.

Теперь не трудно узнать ту простую дробь, отъ которой получена какая-либо изъ данныхъ періодическихъ дробей. Пусть *требуется опредѣлить, отъ какой простой дроби произошла слѣдующая періодическая*: 0, 6666. . . . .

Дробь 0, 6666 . . . . . $= 6 \times 0, 111111 \ldots$; но 0, 11111. . . . . $= {}^1/_9$; слѣдственно, 0, 6666 . . . . . $= 6 \times {}^1/_9 = {}^6/_9 = {}^2/_3$. Дѣйствительно, если $^2/_3$ обратимъ въ десятичную дробь, то получимъ обратно 0, 6666.....

Еще примѣръ: *отъ какой простой дроби произошла дробь* 0, 57915791 . . . . . ?

Рѣшеніе. Дробь 0,57915791.....$= 5791 \times 0,00010001\ldots = 5791 \times {}^1/_{9999} = {}^{5791}/_{9999}$.

Эти примѣры показываютъ, что *всякая чистая періодическая дробь происходитъ отъ такой простой*

дроби, которой числителем служитъ число, образующее въ ней періодъ, а знаменателемъ число, состоящее изъ столько разъ написанной одна подлѣ другой цифры 9, сколько въ періодѣ находится знаковъ, считая и нули.

Есть еще и другой способъ находить для періодическихъ дробей тѣ простыя, отъ которыхъ онѣ получены.

Пусть для примѣра дана дробь

$$0,8888\ldots\ldots$$

Если её увеличить въ 10 кратъ, то получимъ 8, 888...... то есть, *десятикратную* данную дробь; отнявъ же отъ послѣдней *единичную*, получимъ въ остаткѣ *девятикратную.*

$$\begin{array}{l} 8,888\ldots\ldots \\ \underline{0,888\ldots\ldots} \\ 8, \end{array}$$

Слѣдственно, 8 цѣлыхъ представляютъ *девятикратную* данную періодическую дробь, а $^8/_9$ настоящую.

Второй примѣръ. Отъ какой простой дроби происходитъ дробь 0, 545454.....

Рѣшеніе. Отъ $^{54}/_{99}$; потому что, увеличивъ 0, 545454..... въ 100 разъ и изъ произведенія отнявъ единичную данную, получимъ

$$\begin{array}{r} 54,545454\ldots\ldots \\ \underline{0,545454\ldots\ldots} \\ 54, \end{array}$$

цѣлое число 54, которое замѣняетъ данную періодическую дробь, взятую 99 разъ. Поэтому, настоящая періодическая дробь равняется $^{54}/_{99}$.

Третій примѣръ. Дробь 0, 00590059..... *обратить въ простую.*

Рѣш. 59, 00590059..... (выраженіе данной дроби, увеличенной въ 10000 разъ).
0, 00590059.....
59, (цѣлое число, въ которомъ данная дробь содержится 9999 разъ).

Наконецъ $^{59}/_{9999}$ есть та дробь, отъ которой получена данная періодическая.

Общее правило. 1⁰ *переставьте запятую, отъ лѣвой руки къ правой, на столько знаковъ, сколько ихъ находится въ періодѣ;* 2⁰ *вычтите изъ увеличенной такимъ образомъ дроби единичную данную, и* 3⁰ *остатокъ раздѣлите на уменьшенное единицею число, на которое умножали уменьшаемое.*

Если періодическую дробь сопровождаетъ цѣлое число, то послѣднее приписывается къ той простой дроби, отъ которой первая произошла. Такъ напримѣръ, смѣшанное число 4, 636363.....$=4^{63}/_{99}=4^{7}/_{11}$.

β. Смѣшанныя періодическія дроби.

Примѣръ. Найти простую дробь, отъ которой получена слѣдующая періодическая: 0, 48383....

Если въ данной дроби переставимъ запятую черезъ одинъ знакъ вправо, то получимъ 4, 8383.... т. е. дробь въ *десять* разъ бо̀льшую настоящей. Но 0, 8383 .....$=^{83}/_{99}$; поэтому, 4, 8383.....$=4^{83}/_{99}$. Найденное смѣшанное число $4^{83}/_{99}$ замѣняетъ *десятикратную* данную періодическую дробь; итакъ, если раздѣлимъ 4 $^{83}/_{99}$ на 10, то получимъ ту простую, отъ которой произошла данная періодическая. $4^{83}/_{99}:10=^{479}/_{990}$.

Второй примѣръ. Отъ какой простой дроби получена дробь 0, 59142142 . . . . . ?

Рѣшеніе. 0, 59142142 . . . . . $\times 100 = 59{,}142152 \ldots\ldots = 59^{142}/_{999} = {}^{59083}/_{999}$. Но какъ послѣдняя дробь получена отъ увеличенія данной въ 100 разъ, то для нахожденія искомой надобно послѣднюю уменьшить въ 100 разъ. $^{59083}/_{999} : 100 = {}^{59083}/_{99900}$.

Вопросы.

Что же прежде всего надобно сдѣлать?

Поставить запятую предъ тою цифрою, съ которой начинается періодъ.

А потомъ?

Полученную чистую періодическую дробь обратить въ простую.

Далѣе?

Прибавить къ ней цѣлое число, если оно получится черезъ перемѣщеніе запятой.

А наконецъ?

Уменьшить сумму во столько разъ, во сколько періодическая дробь была увеличена черезъ перемѣщеніе запятой.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

Непрерывныя дроби.

№ 65. *Разложеніе простыхъ несокращаемыхъ дробей въ непрерывныя.*

Въ началѣ этой Степени было сказано, что изъ всѣхъ дробей, кромѣ десятичныхъ, также примѣчательны тѣ, которыхъ члены, будучи представлены въ большихъ числахъ, суть взаимно первыя числа, наприм. $^{359}/_{965}$, $^{907}/_{18564}$ и пр. Такія дроби, вводимыя въ исчисленія, слишкомъ обременяютъ выклад-

ки, и потому нерѣдко вмѣсто нихъ предпочитаютъ къ нимъ приближенныя, но за-то выраженныя въ малыхъ числахъ. Приближенныя величины получаются черезъ разложеніе простыхъ дробей *въ непрерывныя*.

Примѣчаніе. Вообще непрерывныя дроби играютъ важную роль при исчисленіи несоизмѣримыхъ количествъ, но въ такомъ случаѣ дальнѣйшее изслѣдованіе ихъ основывается на алгебраическихъ началахъ.

Пусть для примѣра дана будетъ дробь $^{251}/_{764}$, которую требуется выразить приблизительно въ меньшихъ числахъ. Чтобъ отыскать требуемое, надобно узнать, какую часть числитель данной дроби составляетъ отъ своего знаменателя, а для этого оба члена ея раздѣлить на числителя.

$$^{251}/_{764} = \frac{1}{3+\frac{11}{251}}.$$

Отбросивъ дробь, находящуюся въ знаменателѣ, получимъ $^1/_3$, т. е. *первую* приближенную величину данной дроби. Очевидно, что $^1/_3$ болѣе данной дроби, потому что послѣдняя равна 1 раздѣленной на $3^{11}/_{251}$, а не просто на 3. Чтобы видѣть, въ чемъ состоитъ разность между обѣими дробями, данною и первою приближенною, обратимъ ихъ въ десятичныя и потòмъ вычтемъ одну изъ другой.

$$^1/_3 = 0,33333\ldots\ldots$$
$$^{251}/_{764} = 0,32853$$
$$0,00480 \text{ (разность)}$$

Для нахожденія второй приближеннойвеличины надобно поступить съ дробью $^{11}/_{251}$ точно такъ, какъ поступили съ данною, т. е. оба ея члена раздѣлить на числителя.

$$\frac{11}{251}=\frac{1}{22+\frac{9}{11}}$$

Замѣнивъ въ предыдущемъ выраженіи дробь $^{11}/_{251}$ найденною для нея величиною, будемъ имѣть

$$^{251}/_{764}=\frac{1}{3+\frac{1}{22+\frac{9}{11}}}.$$

Отбросивъ снова въ послѣднемъ знаменателѣ дробь $^{9}/_{11}$, найдемъ что

$$^{251}/_{764}=\frac{1}{3+\frac{1}{22}}$$

Это выраженіе легко представить въ видѣ простой дроби: стóитъ только смѣшанное число $3^{1}/_{22}$, которое замѣняетъ знаменателя, привести въ неправильную дробь, и на послѣднюю раздѣлить 1.

$$3^{1}/_{22}=^{67}/_{22}; \qquad 1:\ ^{67}/_{22}=^{22}/_{67}$$

Итакъ, дробь $^{22}/_{67}$ есть *вторая* приближенная величина данной дроби; она и ближе подходитъ къ послѣдней, но за-то выражена уже въ бóльшихъ числахъ. Чтобъ убѣдиться въ томъ, приведемъ её, какъ и первую, въ десятичную дробь, и потóмъ вычтемъ изъ данной.

$$\begin{array}{rl} ^{251}/_{764} = & 0,3285\ldots\ldots \\ ^{22}/_{67} = & \underline{0,3283\ldots\ldots} \\ & 0,0002 \text{ (разность)} \end{array}$$

Разность между обѣими величинами такъ незначительна, что дробь $^{22}/_{67}$ всегда можно принять въ выкладкахъ, не требующихъ большой точности, за данную дробь.

Чтобы найти третью приближенную величину, надобно съ послѣднею откинутою дробью ($^{9}/_{11}$) поступить также, какъ поступили съ дробью $^{11}/_{251}$.

$$^{9}/_{11} = \frac{1}{1+\frac{2}{9}}$$

Слѣдственно, имѣемъ:

$$^{251}/_{764} - {}^{1}/_{3} = \frac{1}{3+\frac{11}{251}} = \frac{1}{3+\cfrac{1}{22+\frac{9}{11}}} = \frac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\frac{2}{9}}}}$$

А *третья* приближенная выразится такъ: $\frac{1}{3+\cfrac{1}{22+\frac{1}{1}}}$

что равно $\frac{1}{3+\frac{1}{23}}$ или $\frac{1}{\frac{70}{23}} = \frac{23}{70}.$

Дробь $^{23}/_{70}$ еще болѣе приближается къ данной, нежели $^{22}/_{67}$, потому что

$$\begin{aligned} ^{23}/_{70} &= 0,52857\,.\,.\,.\,.\,. \\ ^{251}/_{764} &= 0,32853\,.\,.\,.\,.\,. \\ \hline &\ 0,00004 \text{ (разность).} \end{aligned}$$

Для полученія *четвертой* приближенной величины, должно съ дробью ($^{2}/_{9}$) послѣдняго знаменателя поступить также, какъ поступали съ дробями $^{11}/_{251}$ и $^{9}/_{11}$.

$$^{2}/_{9} = \frac{1}{4+\frac{1}{2}}$$

Замѣнивъ въ предыдущей непрерывной строкѣ дробь $^{2}/_{9}$ выраженіемъ $\frac{1}{4+\frac{1}{2}}$, получимъ:

$$\frac{251}{764} = \frac{1}{3+\frac{11}{251}} = \frac{1}{3+\cfrac{1}{22+\frac{9}{11}}} = \frac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\frac{2}{9}}}} = \frac{1}{2+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\frac{1}{2}}}}}.$$

Итакъ, если въ послѣднемъ выраженіи отбросимъ дробь $^{1}/_{2}$, то получимъ величину для *четвертой* приближенной дроби.

$$\frac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}} = \frac{1}{3+\cfrac{1}{22+\frac{4}{5}}} = \frac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{114}{5}}} = \frac{1}{3+\frac{5}{114}} = \frac{1}{\frac{347}{114}} = \frac{114}{347}$$

Но дробь послѣдняго знаменателя, т. е. $^1/_2$, по сокращеніи на своего числителя, или на 1, не перемѣнится; поэтому, выведенная нами послѣдняя строка далѣе не можетъ продолжаться; отсюда окончательно:

$$^{251}/_{784}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\frac{1}{2}}}}}$$

Это выраженіе, замѣняя данную дробь, называется *непрерывною дробью*. Слѣдственно, подъ *непрерывными дробями должно разумѣть такія, которыя имѣютъ знаменателемъ цѣлое число съ дробью, которая также въ своемъ знаменателѣ седержитъ цѣлое число съ дробью, и такъ далѣе.*

Въ предлежащемъ примѣрѣ получили четыре приближенныя величины, а именно: $^1/_3$, $^{22}/_{67}$, $^{23}/_{70}$, $^{114}/_{347}$. Разсмотримъ теперь ихъ относительную величину.

Для полученія первой приближенной дроби, въ выраженіи

$$\cfrac{1}{3+\frac{11}{251}}$$

была отброшена дробь $^{11}/_{251}$. Отбросивъ эту дробь, мы уменьшили знаменателя; уменьшивъ знаменателя, въ выраженіи $^1/_3$ получили большую величину, нежели какую бы надлежало получить. Отсюда видно, что первая приближенная величина должна быть болѣе данной дроби,—въ чемъ мы и удостовѣрились черезъ приведеніе обѣихъ дробей въ десятичныя.

Для *второй* приближенной величины первоначально получили слѣдующее выраженіе:

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+\frac{9}{11}}},$$

въ которомъ отбросили потомъ дробь $^9/_{11}$.

Оставшаяся дробь $^1/_{22}$ болѣе выраженія $\frac{1}{22+\frac{9}{11}}$, поэтому, и дѣлитель $3 + {}^1/_{22}$ болѣе настоящаго дѣлителя $3+\frac{1}{22\frac{9}{11}}$. Отсюда понятно, что частное $\frac{1}{3+\frac{1}{22}}$ менѣе настоящаго частнаго $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22\frac{9}{11}}}$

Слѣдственно, *вторая* приближенная должна быть *менѣе* данной, — что мы также могли замѣтить изъ приведенія ея въ десятичную.

Такимъ же образомъ не трудно доказать, что *третья* приближенная величина будетъ болѣе данной дроби, а *четвертая* опять менѣе ея. Однимъ словомъ, здѣсь примѣчаемъ постоянный законъ, что *всѣ нечетныя приближенныя величины болѣе, а всѣ четныя менѣе данной дроби.*

Примѣчаніе. Обратить дроби $\frac{359}{965}$ и $\frac{95}{161}$ въ непрерывныя, опредѣлить по порядку всѣ приближенныя величины этихъ дробей, сравнить послѣднія между собою, и, наконецъ, оправдать постоянный законъ относительно ихъ взаимнаго достоинства.

Сокращенный способъ приведенія простыхъ дробей въ непрерывныя, какъ видно, весьма сходенъ съ нахожденіемъ общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ: какъ въ послѣднемъ случаѣ такъ и здѣсь, всякій дѣлитель дѣлается дѣлимымъ послѣдующаго дѣленія, знаменателями служатъ частныя, получаемыя по порядку черезъ послѣдовательное дѣленіе, а числители постоянно равны 1.

Пусть требуется дробь $^{835}/_{2617}$ обратить въ десятичную.

Будемъ поступать съ членами этой дроби такъ, какъ поступали при нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя, и замѣтимъ всѣ частныя, которыя получатся отъ этого послѣдовательнаго дѣйствія.

$$2617 : 835 = 3$$
$$835 : 112 = 7$$
$$112 : 51 = 2$$
$$51 : 10 = 5$$
$$10 : 1 = 10$$
$$0$$

Итакъ, частные дѣлители, которые должны служить знаменателями непрерывной дроби, послѣдовательно суть: 3, 7, 2, 5, 10.

Поэтому, $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\frac{1}{10}}}}}$.

Примѣры для упражненія.

№	Данныя дроби.	Частныя, получаемыя черезъ послѣдовательное дѣленіе.	Приближенныя дроби.
1.	$\frac{1769}{5537}$	3, 7, 1, 2, 4, 5, 1, 2	$\frac{1}{3}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{23}{72}$, $\frac{100}{313}$, $\frac{523}{1637}$, $\frac{623}{1950}$.
2.	$\frac{907}{18564}$	20, 2, 7, 5, 2, 1, 3	$\frac{1}{20}$, $\frac{2}{41}$, $\frac{15}{307}$, $\frac{77}{1576}$, $\frac{169}{3459}$, $\frac{246}{5035}$.
3.	$\frac{587}{1943}$	3, 3, 4, 2, 3, 1, 1, 2	$\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{13}{43}$, $\frac{29}{96}$, $\frac{100}{331}$, $\frac{129}{427}$, $\frac{229}{758}$.
4.	$\frac{5065}{13891}$	2, 1, 2, 1, 7, 1, 1, 1, 2, 1, 15	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{31}{85}$, $\frac{35}{96}$, $\frac{66}{181}$, $\frac{101}{277}$.
5.	$\frac{13957}{59476}$	4, 3, 1, 4, 1, 2, 1, 11, 2, 6	$\frac{1}{4}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{17}$, $\frac{19}{81}$, $\frac{23}{98}$, $\frac{65}{277}$, $\frac{88}{375}$, $\frac{1033}{4402}$, $\frac{2154}{9179}$.

№ 66. ПЕРВОЕ ДОПОЛНЕНІЕ КЪ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ.

Рѣшеніе различныхъ задачъ.

Задачи, относящіяся къ такъ-называемымъ тройнымъ правиламъ, въ бо́льшей части ариѳметическихъ книгъ рѣшаются помощію пропорцій; но уже въ Первой Части предлежащаго Руководства мы видѣли, что въ рѣшеніи такихъ задачъ легко можно

обойтиться безъ этого *механическаго* пособія, и гораздо проще и сообразнѣе съ разсудкомъ приводить всѣ рѣшенія къ закону *равенства.* Представимъ здѣсь нѣсколько рѣшеній возможно—разнородныхъ вопросовъ, чтобъ убѣдиться наконецъ, что употребленіе пропорцій въ Ариѳметикѣ есть дѣло совершенно лишнее.

I. *Задачи, относящіяся къ простымъ тройнымъ правиламъ.*

1. *На пару платья употреблено сукна* $4^1/_4$ *арш., шириною въ* $1^3/_4$ *арш.; сколько нужно употребить сукна шириною въ 2 арш. на тоже самое платье?*

Рѣшеніе. Расположимъ числа, входящія въ вопросъ, въ такомъ порядкѣ:

$4^1/_4$ арш. — — — — — $1^3/_4$ арш. шириною
x. « — — — — — 2 »

Здѣсь подъ буквою x разумѣемъ искомое число.

Теперь разсуждаемъ такъ: чѣмъ шире сукно, тѣмъ менѣе аршинъ пойдетъ на платье, и обратно. чѣмъ у́же сукно, тѣмъ болѣе его пойдетъ на платье, Еслибъ вмѣсто $1^3/_4$ или $^7/_4$ арш. шириною, сукно имѣло только 1 арш. ширины, то его пошло бы на платье во столько разъ болѣе $4^1/_2$ арш., во сколько $^7/_4$ болѣе 1. Слѣдственно, сукна шириною въ 1 ар. надобно употребить

$$4^1/_4 \times {}^7/_4 \text{ или } \frac{17 \times 7}{4 \times 4};$$

Но сукно полагается въ 2 арш. шириною; поэтому на тоже платье должно употребить его *вдвое* менѣе противъ сукна, имѣющаго 1 аршинъ ширины.

Итакъ,

$$x = \frac{27 \times 7}{4 \times 4 \times 2} = 5^{23}/_{32} \text{ арш. или 5 арш. } 11^{1}/_{2} \text{ вершковъ.}$$

2. 15 *человѣкъ оканчиваютъ извѣстную работу въ* 8 *дней; сколько понадобится людей, чтобы кончить её въ* $6^{2}/_{3}$ *дней?*

Рѣшеніе.

15 чел. — — — — — 8 дн.,

x « — — — — — $6^{2}/_{3}$ »

Если для окончанія извѣстной работы въ 8 дней надобно имѣть 15 работ., то въ 1 день потребовалось бы въ 8 разъ болѣе работниковъ, т. е. 8×15. Но на совершеніе работы назначено $6^{2}/_{3}$ или $^{20}/_{3}$ дня; поэтому, и число работниковъ должно уменьшить въ $^{20}/_{3}$ раза.

Отсюда $x = \frac{8 \times 15}{\frac{20}{3}} = \frac{8 \times 15 \times 3}{20} = 2 \times 3 \times 3 = 18$ раб.

3. *На кораблѣ запаса только на* 10 *дней, хотя онъ долженъ пробыть въ морѣ* 15 *дней; чѣмъ же надобно уменьшить дачу?*

Рѣшеніе. Служители на кораблѣ вмѣсто цѣлой порціи должны получить такую часть ея, какую число 10 составляетъ отъ 15, т. е. $^{10}/_{15}$ или $^{2}/_{3}$ порціи. Слѣдственно, дачи должны быть уменьшены *одною третью.*

4. *Въ водохранилище проведены три трубы, изъ которыхъ одна наполняетъ его въ* 6 *часовъ, другая въ* $5^{1}/_{4}$ *часовъ, а третія въ* $4^{2}/_{3}$ *часа. Во сколько времени наполнится водохранилище вдругъ всѣми трубами?*

Рѣшеніе. Приведемъ всѣ отношенія къ единицѣ, какъ и всегда поступаемъ. Если первою

трубою водохранилище наполняется въ 6 часовъ, то въ 1 часъ наполнится только $^1/_6$ его. Изъ подобныхъ разсужденій выводимъ, что въ 1 часъ второю трубою наполнится $^4/_{21}$, водохранилища, а третьею $^3/_{14}$ его. Слѣдственно, всѣми трубами наполнится въ 1 часъ времени

$$^1/_6 + ^4/_{21} + ^3/_{14} \text{ (водохранилища)}$$
$$\text{или } ^7/_{42} + ^8/_{42} + ^9/_{42} = ^{24}/_{42} = ^4/_7.$$

Когда $^4/_7$ водохранилища наполняются въ 1 часъ всѣми трубами, то $^1/_7$ его наполнится въ $^1/_4$ часа, а все водохранилище, или $^7/_7$, наполнится въ $^7/_4$ или $1^3/_4$ часа.

II. *Задачи, относящіяся къ сложнымъ тройнымъ правиламъ.*

5. *Нѣкто въ пять дней, находясь въ дорогѣ по 8 часовъ въ день, проѣхалъ 120 верстъ. Спраш, сколько верстъ проѣдетъ онъ въ 15 дней, находясь ежедневно въ дорогѣ по 6 часовъ?*

Рѣшеніе.

5 дней — — — 8 часовъ — — — 12 верстъ
15 » — — — 6 » — — — x »

Если въ 5 дней, находясь ежедневно въ дорогѣ по 8 часовъ, путешественникъ проѣхалъ 120 верстъ, то въ 1 день онъ проѣзжалъ $^{120}/_5$ верстъ, а въ 1 часъ $\frac{120}{5\times8}$. Поэтому, въ 6 часовъ проѣдетъ онъ въ 6 разъ болѣе послѣдняго числа, а въ 15 дней еще въ 15 разъ болѣе.

Итакъ, $x = \frac{120\times6\times15}{5\times8} = 3\times6\times15 = 270$ верс.

6. *Въ 42 дни, работая ежедневно по 8, 5 часа, 15 человѣкъ соткали сукна 250, 6 арш.; спрашив. сколько ча-*

совъ въ день должны работать 30 *человѣкъ, чтобы въ* 21 *день могли соткать* 125, 3 *аршина?*

Рѣшеніе.

15 чел. — — 42 дня — — 8, 5 час. — — 250, 6 арш.
30 » — — 21 » — — x » — — 125, 3 »

Ясно, что *одинъ* человѣкъ окончилъ бы 250, 6 арш. въ 15. 42. 8, 5 часовъ, а 1 аршинъ онъ сработалъ бы

$$\text{въ } \frac{15 . 42 . 8,5}{250,6};$$

Слѣдственно, 125, 3 арш. въ $\frac{15 . 42 . 8,5 . 125,3}{250,6}$

Тридцать же человѣкъ, работая 21 день, совершили бы ту же работу въ 30×21 разъ меньшее время.

$$\text{Отсюда } x = \frac{15 . 42 . 8,5 . 125,3}{250,6 . 30 . 21} = 4,25 \text{ часа.}$$

7. 30 *работниковъ въ* 15 *дней, работая каждый день по* 9 *часовъ, сдѣлали мостовую въ* 25 *саженъ длины и въ* 5 *саженъ ширины. Спрашивается: во сколько дней* 45 *работниковъ окончатъ мостовую въ* 60 *саженъ длиною и въ* 6 *саженъ шириною, работая каждодневно по* 12 *часовъ?*

Рѣшимъ эту задачу двоякимъ способомъ, основывая рѣшеніе въ первомъ случаѣ на пропорціяхъ, а во второмъ на первыхъ четырехъ дѣйствіяхъ Ариѳметики.

Рѣшеніе, основанное на пропорціяхъ.

Пусть x''' есть искомое число дней работы; напишемъ однородныя количества подъ однородныя,

Рѣшеніе, основанное на четырехъ первыхъ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ.

Когда 30 человѣкъ въ 15 дней оканчиваютъ извѣстную работу, то 1 человѣку въ 30

			саж. дл.	с. шир.
30 чел.	15 дн.	9 час.	25	25
45 »	x	12 »	60 »	6 »

и потóмъ скажемъ: если 30 человѣкъ, работая по 9 часовъ въ день, оканчиваютъ свое дѣло въ 15 дней, то 45 чел., работая по столько же часовъ въ день, во сколько дней окончатъ тоже дѣло?

30 чел......15 д. } содержаніе
45 » x » } обратное.

$45 : 30 = 15 : x$

Работая по 9 часовъ въ день, работники оканчиваютъ мостовую (въ 25 саж. длины и 5 саж. ширины) въ x дней, то во сколько дней x' они окончатъ её, работая каждодневно по 12 часовъ?

9 час..... x дн. } содержаніе
12 » .....x' » } обратное.

$12 : 9 = x : x'$

Мостовую въ 25 саженъ длины 45 работниковъ оканчиваютъ въ x' дней, то во сколько дней x'' они сдѣлаютъ мостовую въ 60 саженъ длины?

25 саж....... x' } содержаніе
69 » ...... x'' } прямое.

$25 : 60 = x' : x''$

Наконецъ, мостовую въ 5 саженъ шириною, 45 работниковъ, при прочихъ одинаковыхъ обстоятельствахъ, въ

разъ болѣе времени надобно употребить на совершеніе той же работы. Итакъ, 1 человѣкъ, въ 15×30 дней окончитъ мостовую, длиною въ 25 саженъ, шириною въ 5 саженъ, работая ежедневно по 9 часовъ. Но еслибъ онъ работалъ только по 1 часу въ день, то на туже работу употребилъ бы $15 \times 30 \times 9$ дней. Сверхъ того, когда бы мостовая вмѣсто 25 саж. длины и 5 саж. ширины, имѣла только по одной сажени длины и ширины, то тотъ же 1 работникъ привелъ бы дѣло къ концу въ 25×5 разъ скорѣе.

Итакъ, 1 человѣкъ, работая въ день по 1 часу, окончилъ бы мостовую, имѣющую длины и ширины по 1 сажени, въ $\frac{15 \times 30 \times 9}{25 \times 5}$ дней.

Поэтому, 45 человѣкъ туже самую работу окончили бы въ 45 разъ скорѣе, то есть, въ $\frac{15 \times 30 \times 9}{45 \times 25 \times 5}$ дней.

Если жъ вмѣсто 1 часа въ день, они станутъ работать по 12 часовъ, то еще въ 12 разъ скорѣе поспѣетъ дѣло, а именно:

въ $\frac{15 \times 30 \times 9}{45 \times 25 \times 3 \times 12}$ дней.

никовъ оканчиваютъ въ x'' то во сколько дней они окончатъ мостовую въ 6 саженъ шириною?

$$\left.\begin{array}{l} 5 \text{ саж.} \ldots\ldots x'' \\ 6 \quad \text{»} \ \ldots\ldots x''' \end{array}\right\} \text{содержаніе прямое.}$$

$$5 : 6 = x'' : x'''$$

Теперь соберемъ всѣ выведенныя пропорціи и перемножимъ ихъ между собою почленно.

$$\begin{array}{l} 45 : 30 = 15 : x \\ 12 : 9 = x : x' \\ 25 : 60 = x' : x'' \\ 5 : 6 = x'' : x''' \end{array}$$

$$45.12.25.5 : 30.9.60.6 = 15 : x'''.$$

$$x''' = \frac{15.30.9.60.6}{45.12.25.5} = 21\tfrac{3}{5} \text{ дн.}$$

Но какъ мостовая должна имѣть 60 саженъ длины и 6 ширины, то поэтому работникамъ должно употребить времени въ 60×6 разъ болѣе того, когда бы мостовая имѣла длины и ширины по 1 сажени.

Слѣдств. $x = \frac{15 \quad 30 \times 9 \times 60 \times 6}{45 \times 25 \times 5 \times 12}$ $= \frac{6 \times 6 \times 3}{5} = 21\tfrac{3}{5}$ дней.

Итакъ, 45 работниковъ окончатъ предполагаемую работу въ $21^3/_5$ дней.

Сравнивъ оба предложенныя способа рѣшенія, легко убѣдиться, которому изъ нихъ должно отдать преимущество.

III. *Задачи, относящіяся къ правилу товарищества.*

Правило товарищества имѣетъ цѣлію раздѣлять между двумя или многими членами общество прибыль или убыль, получаемую этимъ обществомъ,—сообразно со вкладами каждаго изъ членовъ. Очевидно, что все дѣло состоитъ здѣсь въ раздѣленіи какой-либо суммы на нѣсколько неравныхъ частей, соразмѣрно тѣмъ ча-

стнымъ вкладамъ, отъ которыхъ эта общая сумма произошла. Рѣшимъ нѣсколько относящихся сюда задачъ.

8. *Изъ трехъ купцовъ первый положилъ для торга* 150 *рублей, второй* 250 *руб. и третій* 350 *рублей. По прошествіи нѣкотораго времени они получили прибыль на свой складочный капиталъ* 200 *рублей. Спрашивается: сколько каждый изъ нихъ долженъ взять изъ этой прибыли?*

Рѣшеніе.

1, ...	150 руб.	200 руб.
2, ...	250 »	
3, ...	350 »	
	750 руб.	

Теперь разсуждаемъ такъ: если на 750 рублей получено 200 руб. прибыли, то на 1 рубль будетъ въ 750 разъ менѣе, т. е. $^{200}/_{750}$ или $^{4}/_{15}$ рубля. Получивъ прибыль съ одного рубля, не трудно узнать, сколько получится прибыли съ 150, 250 и 350 рублей.

Слѣдственно, 1-й купецъ получитъ $150 \cdot {}^{4}/_{15} = 40$ руб.
2-й — — — » — — — — $250 \cdot {}^{4}/_{15} = 66^{2}/_{3}$ »
3-й — — — » — — — — $350 \cdot {}^{4}/_{15} = 93^{1}/_{3}$ »
всего 200 руб.

9. *Одинъ купецъ положилъ въ общій торгъ* 75 *рублей на* 3 *мѣсяца, другой* 25 *рублей на* 5 *мѣсяцевъ, третій* 15 *руб. на* 10 *мѣсяцевъ; они получили прибыли* 80 *рублей. Спрашивается: какъ должно раздѣлить между ними эту прибыль?*

Рѣшеніе. Приведемъ всѣ вклады къ одинакому отношенію, именно къ 1 мѣсяцу. Для этого разсуждаемъ такъ: чтобы вкладъ, обращающійся въ

торговлѣ только *одинъ* мѣсяцъ, могъ принести ту же самую прибыль, какую приносятъ 75 рублей, положенные на 3 мѣсяца, необходимо, чтобы этотъ вкладъ былъ *втрое* болѣе 75 рублей. Слѣдственно, сумма въ 225 руб., положенная на 1 мѣсяцъ, равняется суммѣ въ 75, положенной на 3 мѣсяца. Равнымъ образомъ, 5×25 руб. или 125 руб., положенные также на 1 мѣсяцъ, все тоже, что 25 руб., обращающіеся въ торговлѣ 5 мѣсяцевъ, и, наконецъ, 150 рублей, положенные также на 1 мѣсяцъ, равны 15 руб., положеннымъ на 10 мѣсяцевъ. Поэтому, сумма въ $225 + 125 + 150$ или 500 рублей, обращающаяся въ торговлѣ только 1 мѣсяцъ, принесла прибыли 80 рублей. Когда на 500 рублей получено 80 рублей, то на каждый рубль причитается $^{80}/_{500}$ или $^{8}/_{50}$ руб.

Итакъ, первый купецъ получитъ $225 \cdot {}^{8}/_{50} = 36$ руб.
второй — — — » — — — — $125 \cdot {}^{8}/_{50} = 20$ »
третій — — — » — — — — $150 \cdot {}^{8}/_{50} = 24$ »
80 руб.

10. *Нѣкто начинаетъ торговать, имѣя капиталу 25.000 рублей. По прошествіи 5 мѣсяцевъ, желая распространить свое предпріятіе, онъ приглашаетъ къ себѣ въ товарищи одного купца, который даетъ ему капиталъ въ 40.000 рублей; по прошествіи еще 6 мѣсяцевъ другой купецъ предлагаетъ ему сумму въ 60.000 рублей. Послѣ двухъ лѣтъ это предпріятіе принесло барыша 80.000 рублей. Притомъ было условлено, что тотъ, кто займется этимъ предпріятіемъ, получитъ въ свою пользу 5 рублей съ каждыхъ 100 рублей всего барыша. Спрашивается: какъ должна быть велика часть прибыли каждаго компаниста?*

Рѣшеніе. По условію задачи, тотъ, кто беретъ на себя всѣ труды по общему предпріятію, получаетъ 5 рублей съ каждыхъ 100 рублей барыша. Поэтому, съ 80.000 рублей онъ долженъ получить 4000 рублей. — Итакъ, остается 76 000 рублей для раздѣла между тремя купцами, соразмѣрно положеннымъ ими вкладамъ, а также времени, въ которое обращался въ торговлѣ капиталъ каждаго.

Вкладъ перваго обращался въ торговлѣ 24 мѣсяца
— — — втораго — — — — — — » — — — — 19 »
— — — третьяго — — — — — — » — — — — 13 »

Но 25.000 рублей, положенные на 24 мѣсяца, все равно что 25.000×24 или 600.000 рублей, положенные на 1 мѣсяцъ. Равнымъ образомъ, 40.000 руб. втораго, положенные на 19 мѣсяцевъ, тоже, что 760.000 руб., положенные на 1 мѣсяцъ. Наконецъ, 60.000 руб. третьяго, которые положены на 13 мѣсяцевъ, все равно, что 780.000 руб., обращающіеся въ торговлѣ 1 мѣсяцъ.

Итакъ, барышъ въ 76.000 рублей надобно раздѣлить на три неравныя части, сообразно суммамъ: 600.000, 760.000 и 780.000, обращающимся въ торговлѣ одинакое время, которыя вмѣстѣ составляютъ 2.140.000 рублей.

Отсюда часть 1-го $= \frac{76.000 \times 60}{214} = 21308,\ 41$ руб.
— — 2-го $= \frac{76.000 \times 76}{214} = 26990,\ 65$ »
— — 3-го $= \frac{76.000 \times 78}{214} = 27700,\ 94$ »

76000 руб.

Повѣрка: + 4000

80000 руб.

11. *Нѣкто по смерти своей оставилъ четырехъ наслѣдниковъ, для которыхъ сдѣлалъ слѣдующее завѣщаніе: первый изъ нихъ долженъ получить изъ всего имущества $^1/_6$, второй $^2/_5$, третій $^4/_9$, а четвертый $^1/_3$. Спрашивается: сколько каждый долженъ получить изъ наслѣдства, состоящаго въ 40. 000 рубляхъ?*

Рѣшеніе. Еслибъ сумма четырехъ данныхъ долей равнялась 1, то легко было бы исполнить условіе завѣщанія: надлежало бы только опредѣлить постепенно сперва 6-ю часть отъ 40000 руб., потомъ $^2/_5$ и т. д.; но, по приведеніи дробей $^1/_6$, $^2/_5$, $^4/_9$, $^1/_3$ къ одинакому знаменателю, находимъ, что сумма ихъ равняется $1^{31}/_{90}$, то есть, выводъ бо̀льшій единицы. Поэтому, легко замѣтить, что не достало бъ наслѣдства, еслибъ каждому выдать то, что по завѣщанію опредѣлено. Однакожъ наслѣдство должно быть раздѣлено соразмѣрно числамъ: $^1/_6$, $^2/_5$, $^4/_9$, $^1/_3$, или все тоже, что числамъ: 15, 36, 40, 30. Но сумма послѣднихъ$=$121. Слѣдственно, 40. 000 рублей надобно раздѣлить на 4 части, соразмѣрно числамъ: 15, 36, 40, 30.

Выводы:

1-я часть $= \frac{15 \cdot 40000}{121} =$ 4958, 68 руб.

2-я часть $= \frac{36 \cdot 40000}{121} =$ 11900, 82 »

3-я часть $= \frac{40 \cdot 40000}{121} =$ 13223, 14 »

4-я часть $= \frac{30 \cdot 40000}{121} =$ 9917, 36 »

Примѣчаніе. Изъ рѣшенія предложенныхъ задачъ, относящихся къ правилу товарищества, легко усмотрѣть, что вся трудность состоитъ здѣсь не въ какихъ-либо особыхъ правилахъ, а единственно въ однихъ соображеніяхъ

условій задачи. Во всѣхъ задачахъ этого рода, въ общности разсматриваемыхъ, рѣшается одинъ и тотъ же вопросъ: *какимъ образомъ раздѣлить какое-либо число на нѣсколько неравныхъ частей, соразмѣрно другимъ даннымъ числамъ, предварительно приведеннымъ къ однородности?*

IV. *Задачи, относящіяся къ правилу соединенія или цѣпному (переводному).*

Цѣль задачъ этого рода состоитъ въ опредѣленіи отношенія монетъ двухъ государствъ, когда притомъ отношенія этихъ монетъ къ монетамъ другихъ государствъ предполагаются извѣстными или данными. Это дѣйствіе потому назвали правиломъ соединенія или цѣпнаго, что въ немъ соединяются различныя отношенія въ одно.

12. *Если 50 ливровъ Парижскихъ равняются 51 ливру Гамбургскому, а 25 ливровъ Гамбургскихъ составляютъ 24 ливра Франкфуртскихъ, то требуется узнать, какой части Франкфуртскаго ливра равняется 1 Парижскій ливръ?*

Ясно, что 50 Париж. ливр. = 51 Гамб.
25 Гамбург. = 24 Франкф.

Если 25 Гамб. ливровъ равняются 24 Франкф., то 1 Гамб. $= {}^{24}/_{25}$ Франкф.; поэтому 50 Париж. ливровъ или 51 Гамб. $= \frac{51.24}{25}$, а 1 Париж. $= \frac{51.24}{50.25} = {}^{612}/_{625}$ Франкфуртскаго.

13. *Выразить Французскій метръ посредствомъ Русскаго аршина, причемъ извѣстно, что 15 футовъ Париж. = 16 фут. Англійск., а метръ = 3, 0784440 ф. Пар.; Русская же сажень = 7 фут. Англійскимъ.*

Рѣшеніе.

1 Пар. футъ $= {}^{16}/_{15}$ ф. Анг.
1 Анг. — — — $= {}^{3}/_{7}$ арш. Русск.

Итакъ,

$$1 \text{ метръ} = \frac{3,0784440 \times 16}{15} \text{ Анг. фута}$$

$$\text{или } 1 \text{ метръ} = \frac{3,0784440 \times 16 \times 3}{15 \times 7} \text{ Рус. арш.}$$

$$\text{или } 1 \text{ метръ} = 1,407 \text{ Русск. аршина.}$$

14. *48 франковъ соотвѣтствуютъ 52 Англійск. шиллингамъ; 15 Анг. шилл.=6 Нѣмец флоринамъ; 50 Нѣмец. флор.=7 Гамб. дукатамъ; 14 Гамб. дукатовъ=40 Росс. рублямъ. Требуется опредѣлить, сколькимъ Росс. рублямъ соотвѣтствуютъ 2500 франковъ.*

Рѣшеніе.

1 франкъ $= {}^{52}/_{48}$ Англ. шилл.

1 Анг. шилл. $= {}^{6}/_{15}$ Нѣм. флор.

1 Нѣм. фл. $= {}^{7}/_{50}$ Гамб. дукат.

1 Гамб. дук. $= {}^{40}/_{14}$ Росс. рублямъ.

Слѣдственно,

$$1 \text{ франкъ} = \frac{52.\ 6.\ 7.\ 40}{48.\ 15.\ 50.\ 14} \text{ руб.}$$

$$2500 \text{ фр} = \frac{2500.\ 52.\ 6.\ 7.\ 40}{48.\ 15.\ 50.\ 14} = 433 \text{ руб. } 33 \text{ коп.}$$

Примѣчаніе. Очевидно, что такъ-называемое цѣпное правило есть не что иное, какъ умноженіе дробей, и именно относится къ тому случаю, гдѣ берутся дроби отъ дробей (См. NoNo 42-й и 54-й).

V. *Задачи, относящіяся къ правилу смѣшенія.*

Задачи этого рода бываютъ двухъ видовъ: 1° *когда по нѣсколькимъ разнымъ сортамъ какого-либо вещества, причемъ извѣстно число и достоинство каждаго сорта, требуется опредѣлить средній сортъ;* 2° *когда требуется опредѣлить количество каждаго сорта, входящаго въ составъ смѣси, по данной цѣнѣ или достоинству, какъ каждаго сорта въ особенности, такъ и всей смѣси вообще.*

15. *Нѣкто имѣетъ двухъ сортовъ пороху: 100 фунтовъ перваго сорта, изъ которыхъ каждый стòитъ по 1 р. 20 коп., и 35 фунт. втораго, по 85 коп. за фунтъ; онъ желаетъ знать, если весь имѣющійся у него порохъ смѣшать вмѣстѣ, то по чемъ обойдется ему фунтъ смѣшаннаго пороху.*

Рѣшеніе. Опредѣлимъ сперва количество и цѣну всего пороху, который желаетъ этотъ нѣкто смѣшать вмѣстѣ.

100 ф.,	по 120 коп. за фунтъ	=	120 руб.	
35 ф.,	по 85 коп. за фунтъ	=	29 р.	75 коп.
135 ф.	смѣси стòятъ		149 р.	75 коп.

Значитъ, что 1 фунтъ смѣси $= \frac{14975}{135} = \frac{2995}{27} =$ 1 р. $10^{25}/_{27}$ коп.

16. *Требуется смѣшать трехъ сортовъ серебро: 23 фунта* 0, 825 *пробы,* 14 *фунтовъ* 0, 910 *пробы и* 19 *фунтовъ* 0, 845 *пробы. Спрашивается проба смѣси изъ этихъ трехъ сортовъ.*

Примѣч. Мастера золотыхъ и серебряныхъ дѣлъ всегда мѣшаютъ золото и серебро съ другими металлами, какъ-то: мѣдью, цинкомъ и проч., отчасти чтобы придать болѣе тягучести благороднымъ металламъ. Очевидно, что по мѣрѣ прибавленія мѣди и проч. къ золоту и серебру, теряется достоинство и самой вещи, сплавленной изъ смѣси. Отсюда происходитъ *проба.* Когда говорятъ, что такая-то золотая или серебряная вещь *такой-то пробы*, то подъ этимъ разумѣютъ, что въ извѣстномъ вѣсѣ, напр. въ 1 фунтѣ, столько-то чистаго золота или серебра. Такъ, напримѣръ, серебро 84-й пробы показываетъ, что въ 1 фунтѣ или 96 золотникахъ смѣси, находится 84 золотника чистаго серебра, а остальные 12 зол. составляютъ мѣдь и проч. — Проба

всѣхъ нынѣшнихъ монетъ составляетъ $\frac{9}{10}$ чистаго золота или серебра.

Рѣшеніе.

Изъ условій задачи видно, что въ 25 фунтахъ перваго сорта содержится 23×0,825 или 18, 975 ф. ч. с.
Въ 14 фунт. 2-го сорта...... 14×0,910 или 12, 740 — — —
— 19 фунт. 3-го сорта...... 19×0,845 или 16, 055 — — —
Въ 56 фунтахъ смѣси содержится 47, 770 чи. се.

Итакъ, проба новаго слитка изобразится черезъ $\frac{47,770}{56}$ или 0, 853.

17. *Одинъ виноторговецъ имѣетъ вино двухъ сортовъ: ведро вина перваго сорта стоитъ 36 рублей, а втораго 20 рублей. Онъ хочетъ смѣшать эти вина въ такомъ количествѣ, чтобы получить 50 ведръ и продавать каждое безъ барыша и убытка, по 30 рублей. Спрашивается: сколько онъ долженъ взять ведръ каждаго сорта, чтобы получить искомую смѣсь?*

Рѣшеніе. Изъ условій задачи видно, что на каждое ведро перваго сорта вина, входящаго въ составъ смѣси, получается убытку 6 рублей, а на каждое ведро втораго сорта, напротивъ, прибыли 10 рублей. Поэтому, перваго сорта вина должно взять болѣе въ смѣшеніе, нежели втораго, потому что убытокъ съ перваго менѣе прибыли со втораго, виноторговецъ же не хочетъ получить отъ продажи смѣшаннаго вина ни барыша, ни убытка. Такъ какъ на каждое ведро перваго сорта 6 рублей убытку, а на каждое ведро втораго сорта 10 рублей прибыли, то перваго сорта должно взять во столько разъ болѣе втораго, во сколько 10 болѣе 6, т. е. $^5/_3$ раза.

Слѣдственно, если втораго сорта возмется одно ведро, то перваго должно взять $^5/_3$ ведра. Отсюда понятно, что вопросъ приводится къ раздѣленію числа 50 на двѣ неравныя части, соразмѣрно числамъ $^5/_3$ и 1, или $^5/_3$ и $^3/_3$, или проще 5 и 3.

$$50 : 8 = 6^1/_4$$

$6^1/_4 \times 5 = 30^5/_4 = 31^1/_4$ ведр. перваго сорта.

$6^1/_4 \times 3 = \quad 18^3/_4$ » втораго сорта.

Повѣрка.

$31^1/_4$ ведръ,	по 36 руб. каждое	1125 руб.
$18^3/_4$ »	, по 20 руб. каждое	375 »
50 ведръ		1500 руб.

Отсюда 1 вердо стоитъ 30 рублей.

N° 67. ВТОРОЕ ДОПОЛНЕНІЕ КЪ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ.

Объ исчисленіи процентовъ и учета векселей.

Подъ *капиталомъ*, по преимуществу, называютъ всякую сумму денегъ, отданную въ банкъ, или кому-либо заимообразно, для приращенія процентами. *Процентъ* (pro cento) есть прибыль, получаемая съ каждыхъ 100 рублей капитала, отданнаго на опредѣленный срокъ времени. Обыкновенно проценты расчитываются на годъ; такъ напримѣръ: [1, 2, 3, 4, 5 и проч. процентовъ значитъ 1, 2, 3, 4, 5 и проч. рублей прибыли, получаемой втеченіи года съ каждыхъ 100 рублей капитала. Величина *прибыли* или *барыша* зависитъ, во-первыхъ, отъ величины капитала, во-вторыхъ, отъ времени, въ которое этотъ капиталъ обращается въ процентахъ, а въ-третьихъ,

отъ взаимныхъ условій *кредитора* (дающаго въ займы деньги) и *должника* (занимающаго деньги), относительно величины самыхъ процентовъ. Однако въ послѣднемъ случаѣ полагаются предѣлы: законнымъ процентомъ наше Правительство полагаетъ 4 со % (со %—такъ принято въ торговомъ счетѣ означать 100).—Отдавать капиталъ въ проценты все тоже, что отдавать капиталъ *въ ростъ*. Кто, вопреки законовъ, беретъ слишкомъ большіе проценты, про того говорятъ, что онъ пользуется *безмѣрнымъ ростомъ*. Такого чаловѣка называютъ *ростовщикомъ*.

Разрѣшимъ нѣсколько относящихся сюда вопросовъ.

1. *Сколько получится прибыли съ капитала* 2400 *рублей, отданнаго на годъ подъ проценты по* 5 *со %?*

Рѣшеніе. Если на 100 рублей получается 5 рублей прибыли, то на каждый рубль будетъ въ 100 разъ менѣе, т. е. $^5/_{100}$ или $^1/_{20}$ рубля. Слѣдственно, на 2400 руб. получится прибыли

$$2400 . {}^1/_{20} = 120 \text{ руб.}$$

2. *Требуется узнать, сколько получится процентовъ съ* 5000 *рублей за* 2 *года и* 9 *мѣсяц., по* $3^1/_2$ *со % въ годъ, считая проценты на проценты.*

Рѣшеніе. Вычислимъ сперва проценты за одинъ годъ. Если со 100 получается $3^1/_2$ или $^7/_2$, то съ 1 руб. $^7/_{200}$ р.; поэтому, съ 5000 руб. $5000\ {}^7/_{200}=175$ руб.—Итакъ, по прошествіи года капиталъ возрастетъ до 5175 рублей. Исчислимъ теперь проценты съ капитала 5175 руб. за второй годъ.

Съ 1 руб. $^7/_{200}$ руб.

съ 5175 руб. .... $5175 . {}^7/_{200}=181, 125$ руб.

Отсюда видно, что первоначальный капиталъ по прошествіи двухъ лѣтъ возрастетъ до 5356, 125 руб.

Наконецъ, исчислимъ проценты съ капитала 5356, 125 руб. впродолженіи третьяго года, и потòмъ возмемъ отъ полученныхъ процентовъ $^3/_4$, потому что капиталъ обращается въ процентахъ не весь третій годъ, а только 9 мѣсяцевъ, что отъ цѣлаго года составляетъ $^3/_4$.

Выйдетъ:

$$5356,125 \times {}^7/_{200} \times {}^3/_4 = \frac{53,56125 \times 21}{8} = 140,59828......$$

Слѣдственно, всѣхъ процентовъ получится 496, 72328...... руб.

3. *Капиталъ въ 3750 рублей, по прошествіи 2 лѣтъ 6 мѣсяцѣвъ, принесъ процентовъ 719¹/₄ рублей. Надобно узнать величину процентовъ. (Здѣсь предполагаются простые проценты.)*

Рѣшеніе. 2 года и 6 мѣсяцевъ = 30 мѣсяц.

Если въ 30 мѣсяцевъ получено прибыли $719^1/_4$ рублей, или $^{2877}/_4$ руб., то въ 1 мѣсяц. получится въ 30 разъ менѣе, или $\frac{2877}{4 \times 30}$ руб., а въ 12 мѣсяц., или въ 1 годъ, въ 12 разъ болѣе послѣдняго числа, т. е.

$$\frac{2877 \times 12}{4 \times 30}$$

Но это число процентовъ съ 3750 рублей. Итакъ, чтобъ узнать, сколько получятся процентовъ съ 100 рублей, должно послѣднее выраженіе помножить на $^{100}/_{3750}$.

Слѣдственно,

$$x = \frac{2877 \times 12 \times 100}{4 \times 30 \times 3750} = {}^{2877}/_{375} = 7,67 \text{ руб.}$$

4. *Каковъ былъ первоначальный капиталъ, который по прошествіи года обратился въ 2000 рублей, принося 8 процентовъ со %?*

Рѣшеніе. Если вмѣсто каждыхъ ста рублей получается по прошествіи года 108 рублей, то значитъ, что первоначальный капиталъ составляетъ отъ 2000 рублей $^{100}/_{108}$ или $^{25}/_{27}$.

Итакъ $x = \frac{2000 \cdot 25}{27} = \frac{50000}{27} = 1851,85\ldots$ рублей.

5. *Найти капиталъ, который, будучи сложенъ съ пятилѣтними простыми процентами, считая по 4 со %, составляетъ 8208 рублей.*

Рѣшеніе. Если въ одинъ годъ на каждый рубль получено было прибыли $^{4}/_{100}$ руб., то въ 5 лѣтъ, считая простые проценты, получится $^{20}/_{100}$ или $^{1}/_{5}$ рубля. Въ числѣ 8208 рубляхъ заключаются какъ первоначальный капиталъ, такъ и $^{1}/_{5}$ его, составляющая проценты за 5 лѣтъ. Значитъ, что въ 8208 рубляхъ содержатся $^{6}/_{5}$ частей первоначальнаго капитала; поэтому

$$x = 8208 \times {}^{5}/_{6} \text{ руб.} = 6840 \text{ руб.}$$

6. *Въ какое время капиталъ въ 1000 рублей, отданный въ банкъ по 4 со %, принесетъ 48 рублей простыхъ процентовъ?*

Рѣшеніе. 48 рублей процентовъ получены съ 1000 рублей, значитъ съ 1 рубля прибыль равняется $^{48}/_{100}$. Но, по условію задачи, годовые проценты составляютъ отъ капитала $^{40}/_{1000}$. Итакъ, во сколько разъ 48 болѣе 40, во столько разъ болѣе 1 года капиталъ въ 1000 руб. долженъ обращаться въ банкѣ, для полученія съ него 48 рублей процентовъ,

т. е. $^{48}/_{40}$ или $^{6}/_{5}$ года, что составляетъ 1 годъ 2 мѣсяца и 12 дней.

Легко усмотрѣть, что изложенныя здѣсь задачи составляютъ четыре различныхъ разряда, а именно:

1°. Когда по даннымъ первоначальному капиталу, времени обращенія его и процентамъ, требуется опредѣлить приращенный капиталъ.

2°. По первоначальному и приращенному капиталамъ, также времени, опредѣлить величину процентовъ.

3°. По даннымъ первоначальному и приращенному капиталамъ, а также по величинѣ процентовъ, узнать время, въ которое капиталъ находился въ обращеніи.

4°. По приращенному капиталу, времени и процентамъ, опредѣлить первоначальный капиталъ.

Примѣчаніе. Исчисленія процентовъ на проценты, также капиталовъ, обращающихся въ банкѣ большое число лѣтъ, или капиталовъ ежегодно увеличивающихся или убывающихъ, требуютъ особыхъ сокращенныхъ формулъ, безъ которыхъ выкладки дѣлаются крайне затруднительными. Это уже предметъ Алгебры, разрѣшающей всѣ затрудненія на счетъ такихъ случаевъ. Чиновники, занимающіеся подобными выкладками, обыкновенно снабжаются особыми таблицами, въ которыхъ онѣ находятъ уже готовые результаты на всѣ частные случаи.

Обратимся теперь къ такъ-называемому *учету* векселей.

Подъ именемъ *векселя* разумѣютъ въ торговлѣ законное обязательство въ уплатѣ опредѣленной суммы, занятой на извѣстный срокъ времени. *Уче-*

томъ векселя называется удержаніе нѣкоторой суммы съ величины векселя, если уплату по немъ, обыкновенно дѣлаемую по истеченіи срока, требуется получить преждевременно. Такъ, напримѣръ: нѣкто, имѣя вексель, который по прошествіи годоваго срока долженъ возрости, вмѣстѣ съ процентами, до 1000 рублей, передаетъ его другому за 8 мѣсяцевъ до срока. Очевидно, что цѣна настоящаго векселя не есть 1000 рублей, а менѣе, потому что до срока, когда капиталъ возростетъ до 1000 рублей, не достаетъ еще 8 мѣсяцевъ. Опредѣлить, чѣмъ именно менѣе 1000 рублей, новый владѣтель векселя долженъ уплатить прежнему, производя уплату за 8 мѣсяцевъ до срока, и значитъ произвести *учетъ векселя*.

7. *Учесть вексель въ 1200 рублей, данный на годъ по 6%, но уплачиваемый за 4 мѣсяца до срока.*

Рѣшеніе. Если въ годъ 6%, то въ 4 мѣсяца 2%. Поэтому, четырехмѣсячный учетъ съ каждой сотни равенъ 2 рублямъ, или все тоже, каждые 102 рубли, платимые по истеченіи четырехмѣсячнаго срока, обращаются въ 100 рублей, платимыхъ за четыре мѣсяца впередъ. Поэтому, дѣйствительная цѣна векселя составляетъ отъ 1200 рублей часть, равную $^{100}/_{102}$.

Отсюда $x = \frac{1200 \times 100}{102} = 1176,\ 47$ руб.

А учетъ составляетъ $1200 - 1176,47 = 23,55$ руб.

8. *Спрашивается настоящая цѣна векселя въ 4850 р., по $^3/_4$ % въ мѣсяцъ, которому срокъ уплаты по прошествіи $15^1/_2$ мѣсяцевъ.*

Рѣшеніе. Если въ мѣсяцъ на 100 получается $^3/_4$ процента, то черезъ $13^1/_2$ мѣсяцевъ получится въ $13^1/_2$ разъ болѣе. $^3/_4 \times ^{27}/_2 = ^{81}/_8 = 10,125$. Отсюда видно, что каждые 100 руб. первоначальнаго капитала равняются 110,125 руб., получаемымъ по прошествіи $13^1/_2$ мѣсяц. Такимъ образомъ

$$x = \frac{4850 \times 100}{100,125} = \frac{485000000}{110125} = 4404,09 \text{ руб.}$$

Слѣдственно, учетъ $= 4850 - 4404,09 = 445,91$ руб.

9. *Каковъ долженъ быть дѣйствительный капиталъ билета въ* 2850 *руб.* 45 *коп., уплачиваемаго въ* 2 *года и* 8 *мѣсяцевъ, полагая по* $8^3/_4$ *процент. въ годъ?*

Рѣшеніе. Каждые 100 руб. приносятъ въ годъ $8^3/_4$ р., а по прошествіи 2 лѣтъ и 8 мѣсяцевъ, считая простые проценты, $8^3/_4 \times 2^2/_3 = ^{70}/_3$ руб. Итакъ, дѣйствительная цѣна билета

$$\frac{2850,45 \times 100}{100 + \frac{70}{3}} = \frac{2850,45 \times 100 \times 3}{370} = 2311,18 \text{ руб.}$$

Примѣчаніе. Раздѣлить число 135 на двѣ такія части, чтобъ одна содержалась въ другой $1\frac{2}{3}$ раза. — Раздѣлить 1000 рублей между двумя лицами такъ, что на каждые $2\frac{1}{2}$ руб., которые получитъ первый, второй получилъ бы $3\frac{1}{4}$ р. Найти число, котораго $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{7}$, сложенныя вмѣстѣ, равняются 575. — Найти такое число, что если помножить его на 4, и потòмъ это произведеніе раздѣлить на 7, то получится въ частномъ 28. — Капиталъ, отданный въ ростъ по 4%, увеличился по прошествіи года до 13167 рублей. Какъ великъ былъ первоначальный капиталъ? — Купецъ, продавая фунтъ нѣкотораго товара по 90 коп., получаетъ по $12\frac{1}{2}$ коп. со %. Во что обошелся ему самому пудъ этого товару? — Сумма двухъ дробей $= \frac{9}{11}$, а разность между ними $= \frac{2}{7}$.

Найти обѣ дроби порознь.—До какой суммы возростетъ капиталъ въ 2500 рублей по прошествіи 4 лѣтъ и 7 мѣсяцевъ, отданный по $4\frac{1}{2}$ со $\frac{0}{0}$, считая проценты на проценты?—Нѣкто имѣетъ у себя серебро двухъ различныхъ пробъ, такъ что серебро первой пробы стóитъ 96 рублей фунтъ, а второй 82 руб. фунтъ. Требуется сдѣлать сосудъ въ 20 фунтовъ вѣсомъ изъ такого серебра, котораго фунтъ стóитъ 90 руб. Спрашивается: сколько фунтовъ серебра той и другой пробы долженъ онъ употребить на этотъ сосудъ?—Изъ трехъ работниковъ, первый можетъ совершить извѣстную работу въ $8\frac{1}{2}$ дней, второй въ $7\frac{1}{4}$ дней, а третій въ $6\frac{3}{4}$ дней. Во сколько времени поспѣетъ таже работа, если всѣ трое будутъ работать вмѣстѣ?—Три купца A, B, C, согласились торговать вмѣстѣ: A положилъ въ общій торгъ 2400 рублей на 9 мѣсяцевъ, B — 1000 рублей на 11 мѣсяцевъ, и C — 800 рублей на 14 мѣсяцевъ. Они пріобрѣли барыша 600 рублей. Спрашивается: сколько каждый изъ этого барыша получить долженъ?—Найти такое число, что если умножить его на $3\frac{3}{4}$, изъ произведенія вычесть 60, остатокъ умножить на $2\frac{1}{3}$, и изъ послѣдняго произведенія вычесть 30, то въ остаткѣ ничего не выйдетъ.

Конецъ второй части.

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

ИНОСТРАННЫХЪ МОНЕТЪ И МѢРЪ СЪ РОССІЙСКИМИ.

ЗОЛОТЫЯ МОНЕТЫ.	На Россійское золото.		На Россійское серебро, съ прибавленіемъ 3½.		СЕРЕБРЯНЫЯ МОНЕТЫ.	На Россійское серебро.	
	Руб.	Коп.	Руб.	Коп.		Руб.	Коп.
1. Французская въ 40 франковъ	9	55¾	9	84	1. Ганноверскій талеръ	1	35½
2. Французская въ 20 франковъ	4	77¾	4	92	2. Французская пятифранковая монета	1	24
3. Сардинская въ 20 лиръ	4	77¾	4	92	3. Прусскій талеръ	—	91½
4. Прусская въ 10 талеровъ	9	93¼	10	23¼	4. Саксонскій и Баварскій	1	27½
5. Прусская въ 5 талеровъ	4	96¼	5	11¼	5. Шведскій	1	41¼
6. Ганноверская въ 10 талеровъ	9	89¼	10	17¼	6. Датскій	1	36¼
7. Ганноверская въ 5 талеровъ	4	93¾	5	8½	7. Брабантскій	1	39
8. Саксонская въ 10 талеровъ	9	88¼	10	17¼	8. Австрійскій	1	26¼
9. Саксонская въ 5 талеровъ	4	93¼	5	8½	9. Испанскій піастръ	1	33
10. Испанскій дублонъ	19	34½	19	94½	10. Цванцигеръ или 20 крейцеровъ	—	17¼
11. Австрійскій суверендоръ двойной	8	44¼	8	69¼			

I. *Монеты.*

Австрія. 1 австрійск. талеръ (специесъ-талеръ) = 2 гульд. = 120 крейцеровъ = 480 пфеннигамъ.

Англія. 1 кронъ = 5 шиллингамъ = 60 пенсамъ = 240 фартингамъ = 1,52 руб. сереб. Гинея (золотая монета) = 21 шиллингу = 6,406 руб. золот. 1 фунтъ стерлинговъ = 20 шиллингамъ.

Испанія. 1 піастръ = 20 реаламъ = 680 мараведисамъ.

Пруссія. 1 талеръ = 24 старымъ грошамъ = 30 сереб. грошамъ = 360 пфеннигамъ.

Франція. 1 франкъ = 20 су = 100 сантимамъ.

Швеція. 1 талеръ = 48 шиллингамъ = 576 пфеннигамъ.

Турція. 1 піастръ (въ 1818 г.) = 40 пара = 22,875 коп. серебромъ.

Данія. 1 долларъ = 3 маркамъ = 48 шиллинг. = 0,703 руб. сереб.

Гамбургъ. 1 рейхсталеръ (специесъ-банко) = 3 марк. = 48 шиллинг. = 576 пфенниг. = 1,444 руб. сереб.

Неаполь. 1 дукато = 5 скудо = 100 грани = 1,060 руб. сереб.

Римъ. 1 скудо = 3⅓ тестони = 10 паоли 100 байокки = 1,347 руб. сереб.

Нидерланды. 1 флоринъ = 2½ гульдам. = 80 штиверовъ = 400 дюйтъ = 1,330 руб. сереб. 1 червонецъ = 2,86 руб. злат.

Португалія. 1 крузадо = 12 реаламъ = 480 рейсамъ = 0,73 руб. сереб.

Штаты Сѣверной Америки. 1 долларъ = 10 димамъ = 100 центамъ = 1,39 руб. сереб.

Орелъ (Eagle) = 10 долларамъ.

Польша. 1 злотый = 30 грошамъ = 0,15 руб. сереб. 1 дукатъ = 25 злотымъ.

II. *Вѣсъ.* 1 россійскій фунтъ = 0,9780 рижскаго ф. = 0,9048 ревельскаго = 1,0089 польскаго = 0,9017 англійскаго = 1,0960 англ. тройскаго ф. = 0,4089 киллограмма = 0,8760 прусскаго фунта = 1,76 кельнской марки.

III. *Путевыя мѣры.* 1 верста = 0,6629 англійск. миль = 0,5762 морской (италіянской) = 0,1067 миріаметра = 0,2396 франц. почтовой = 0,0096 градуса экватора. 1 англ. миля = 1760 ярдамъ.

VI. *Мѣры емкости для жидкихъ тѣлъ.* 1 ведро = 9,8196 рижскихъ штофамъ = 0,1229 гектолитрамъ = 2,7027 галлонамъ = 0,1785 прусскимъ эймерамъ.

V. *Мѣры емкости для сыпучихъ тѣлъ.* 1 четверикъ = 0,3761 рижскаго лофа = 0,2622 гектолитра = 5,7724 галлонамъ = 0,4770 прусскаго шеффеля.

VI. *Поземельныя мѣры.* 1 десятина (2400 квадр. саженъ) = 3,1066 англійск. Loofstelle = 3,1962 арпанамъ = 1,0926 гектарамъ = 2,6996 англ. акрамъ = 4,2781 прусск. моргенамъ = 180 квадрат. прусск. руттамъ.

Таблица II

